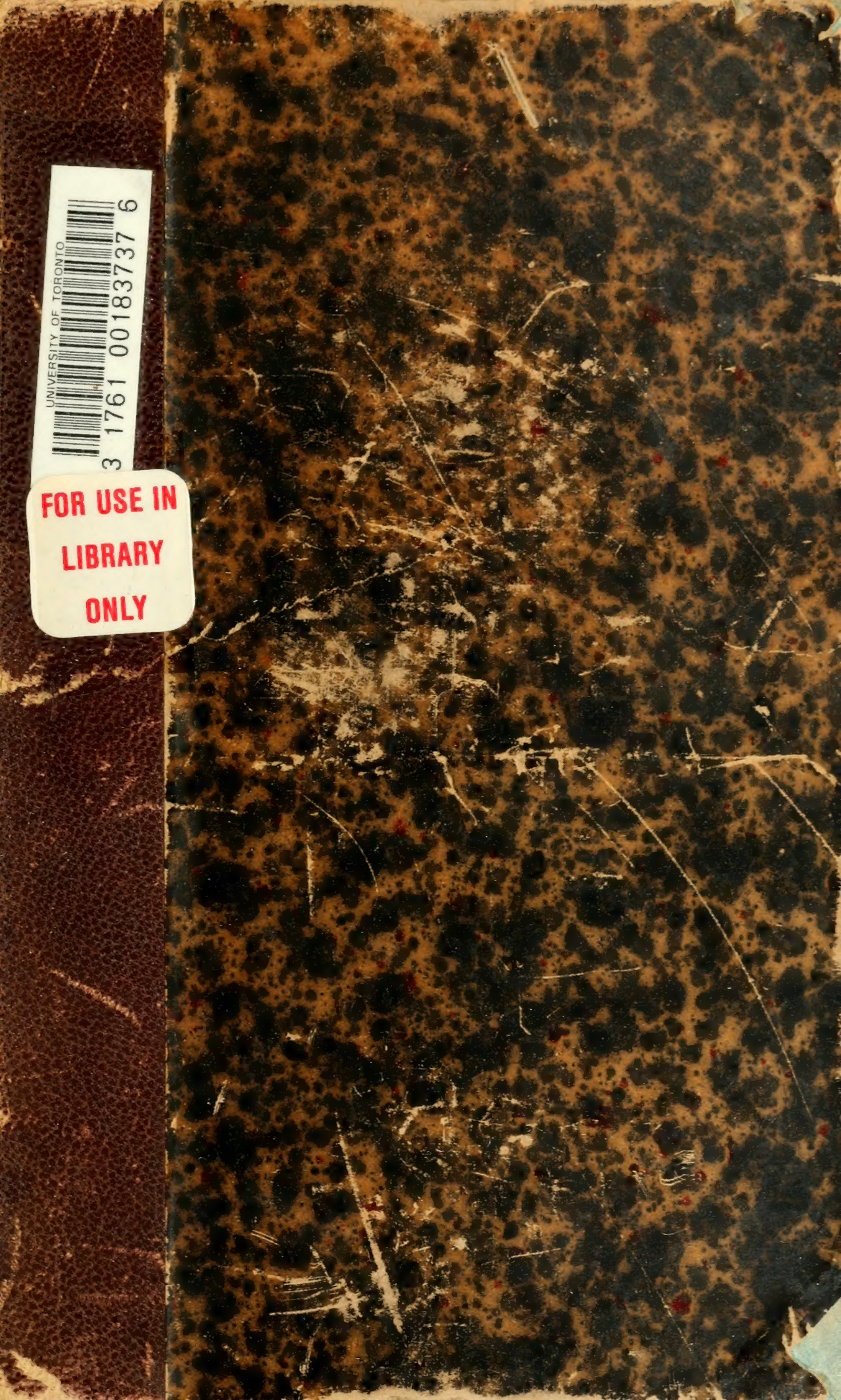
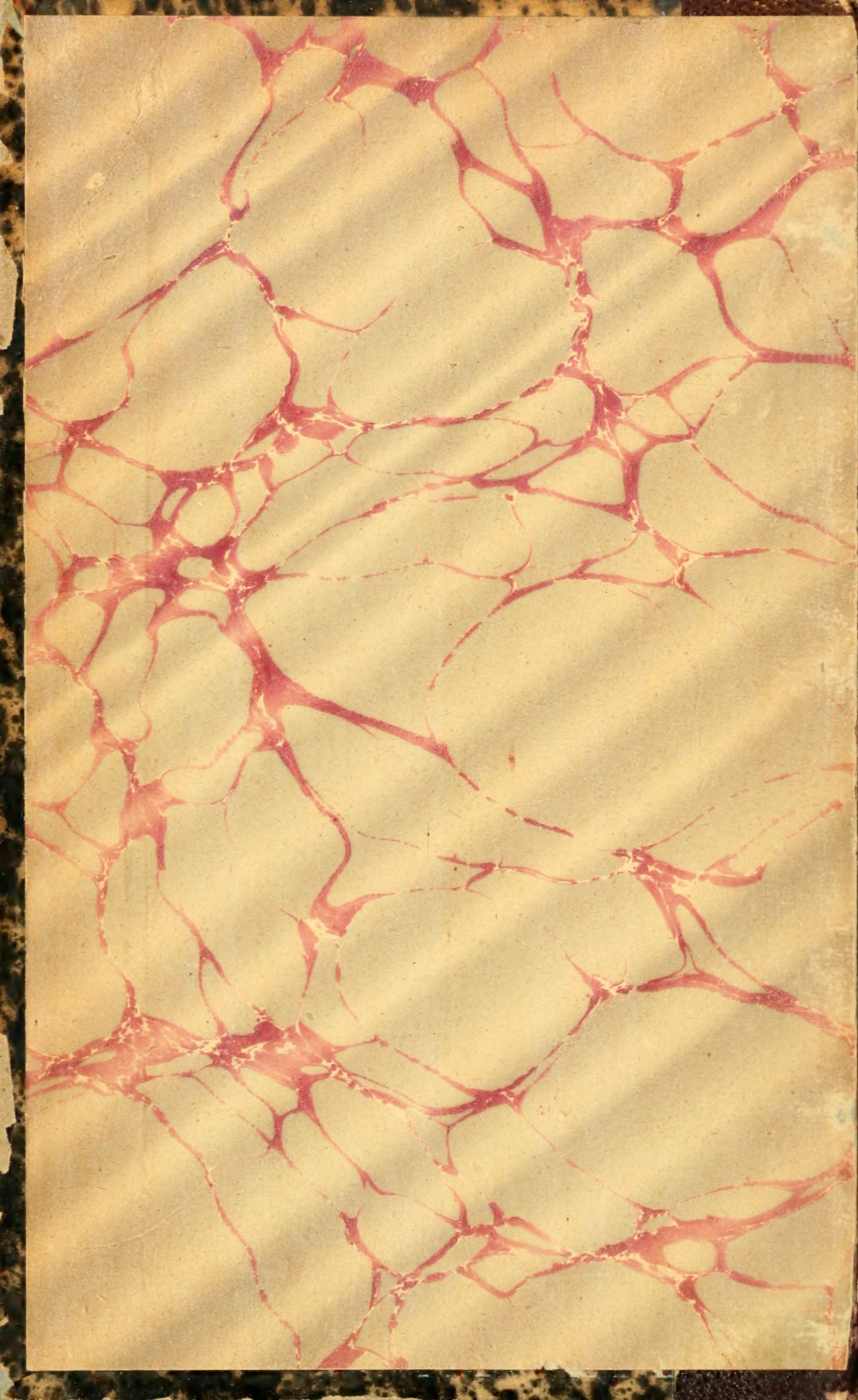
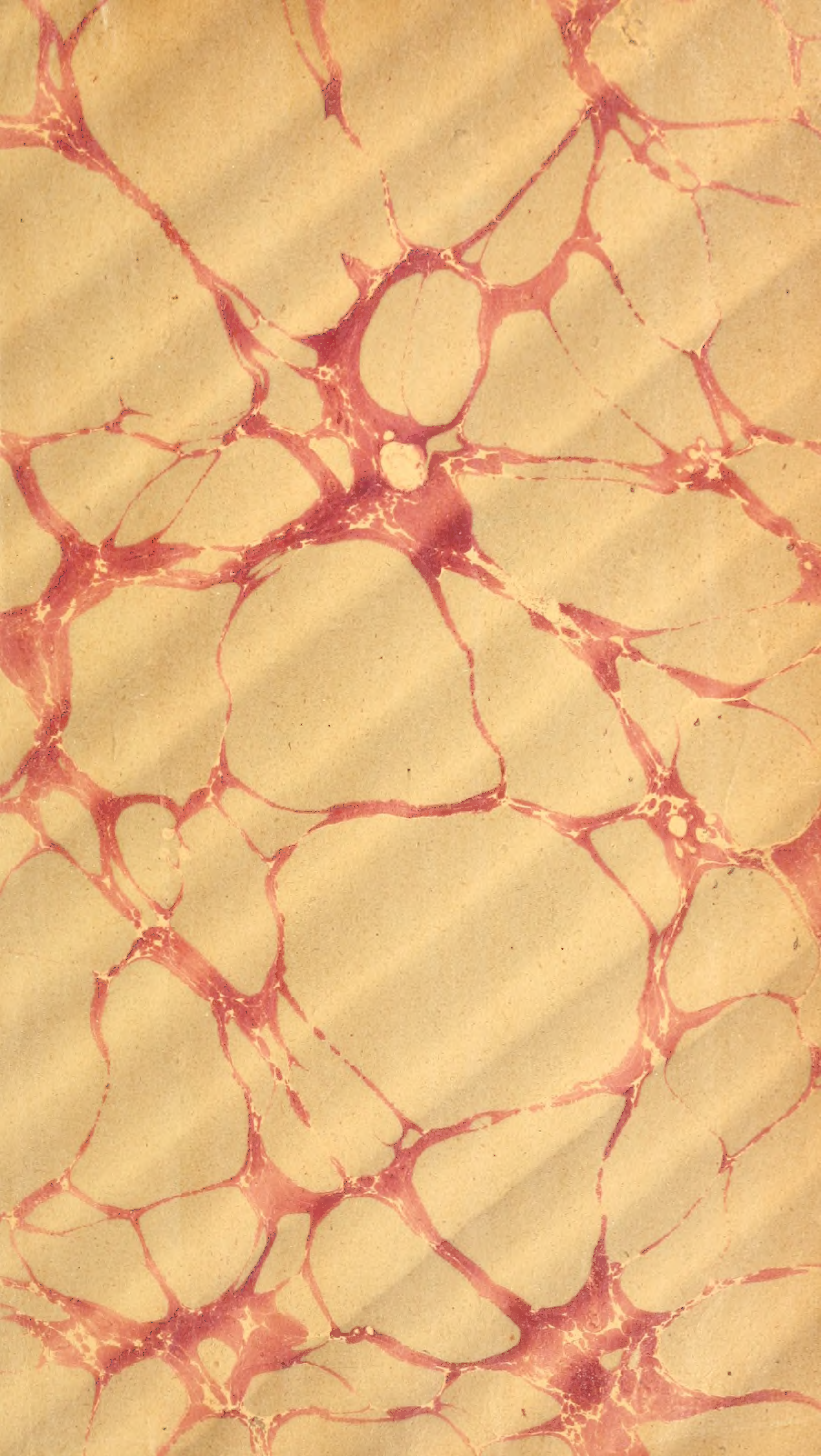

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00183737 6
FOR USE IN
LIBRARY
ONLY





HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

DANS

L'ANTIQUITÉ ET LE MOYEN AGE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
29221 Quai des Grands-Augustins, 55.

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

DANS

L'ANTIQUITÉ ET LE MOYEN AGE,

PAR

H.-G. ZEUTHEN,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE.

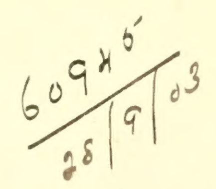
ÉDITION FRANÇAISE, REVUE ET CORRIGÉE PAR L'AUTEUR,

TRADUITE PAR

JEAN MASCART,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.





PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

AVANT-PROPOS DE L'ÉDITION DANOISE.

Je me suis efforcé, dans cette *Histoire des Mathématiques*, de mettre principalement en relief ce qu'il importe aux étudiants et aux professeurs de savoir. L'essentiel n'est pas, pour eux, de posséder un grand nombre de détails historiques, de connaître le premier qui découvrit telle ou telle vérité, qui préconisa telle ou telle méthode, mais, bien plutôt, de pouvoir apprécier exactement les formes sous lesquelles vérités et méthodes se manifestèrent et quelles applications en furent faites; et, par la même occasion, la notion précise de ces origines sera la condition indispensable pour comprendre la lente évolution des formes, jusqu'à donner aux Mathématiques leur physionomie actuelle.

En insistant particulièrement sur ce point je me trouve, d'ailleurs, en conformité parfaite avec le programme pour l'examen du professorat des Mathématiques : on y exige, en effet, « un bref aperçu sur l'Histoire des Mathematiques, outre lequel le candidat est tenu d'avoir fait connaissance, directement, avec les *Éléments* d'Euclide et la *Géométrie* de Descartes ». Or cette exigence indique assez nettement que l'on réclame du candidat, pour les faits historiques, une intelligence que la notion des Mathématiques du passé pourra seule lui procurer.

Mais ce Volume traite uniquement de l'antiquité et du moyen âge : aussi, sur les deux écrivains nommés,

n'aurai-je à m'occuper que d'Euclide. Alors, à chaque citation, je joins un renvoi précis à la proposition correspondante, j'explique les passages où nous pouvons apprendre quelque chose, et je m'efforce d'entraîner une féconde appréciation de cet auteur; après quoi, et d'une manière aussi compréhensible que possible, j'essaie de profiter de cette connaissance pour rendre ce qu'il me faut rapporter des autres écrivains, de ceux-là, précisément, que les lecteurs n'ont probablement jamais eus entre les mains. Et si j'ai utilisé les *Éléments* d'Euclide pour expliquer les formes logiques que les mathématiciens grecs observèrent si strictement, je ne m'en suis point tenu, cependant, au sens qu'elles avaient pour les Grecs : dans les additions en petit caractère j'en examine la signification intrinsèque, ce qui, je l'espère, permettra aux futurs maîtres de pouvoir discerner, parmi ces formes, la part qu'il faut conserver et celle qu'il faut abandonner.

Dans ces conditions, et sans avoir l'intention de donner à l'exposé historique de bien larges dimensions, il fallait néanmoins que le cadre fût le meilleur et le plus sûr possible : au reste, cette tâche m'était singulièrement facilitée par les *Leçons d'Histoire des Mathématiques* de Cantor, Ouvrage qui rapporte tous les faits d'une manière extraordinairement complète et digne de foi. J'en fis encore mon profit au cours des recherches spéciales que comportait le plan de mon livre : sans doute, je devais, de préférence, emprunter les matériaux de ces recherches à l'étude directe des principaux mathématiciens des époques traitées, mais, au cours de cette étude même, les extraits de Cantor devaient m'initier d'une manière excellente aux objets nécessaires, même quand je dus, par la suite, comprendre et utiliser ces

matériaux autrement que lui. — De plus, je savais pouvoir me fier en toute sûreté à son appréciation sur le contenu des Ouvrages de moindre importance, Ouvrages qui ne m'étaient pas accessibles, parfois, ou que, faute d'occasion, je ne pouvais directement connaître.

Mais ce n'est pas uniquement pour les questions de fait pur que je m'appuie sur Cantor : généralement aussi je m'en tiens à ses jugements sur les époques où les Mathématiques ne firent que reculer — ou, du moins, n'accomplirent aucun de ces progrès véritables que mon but était ici de poursuivre : ce que je dis, par exemple, du calcul avec l'abaque au moyen âge, et de son origine, est le resultat immédiat des recherches intelligentes et sagaces de Cantor.

Par ailleurs, pour mon étude sur les œuvres conservées des grands mathématiciens, leurs liaisons les uns avec les autres, les travaux et les résultats mathématiques qui ne sont connus que par des comptes rendus, je dus avoir recours à la riche littérature actuelle qui concerne l'Histoire des Mathématiques — cela va de soi.

Mais, cependant, le caractère didactique du livre actuel m'empêcha de mentionner ce dont je suis redevable à celui-ci, ou celui-là : pour le faire, en effet, il m'eût fallu, non seulement exposer la pensée ou l'idée que j'empruntais telles quelles, mais encore rendre compte des modifications qu'elles avaient pu subir par mon elaboration personnelle, et pour quelles raisons je les avais ainsi modifiées. La place m'eût fait défaut : je me suis donc contenté de donner brièvement la raison des idées que j'adopte en fin de compte.

Dans un autre livre, je ne me suis pourtant point affranchi d'une pareille discussion approfondie, et j'ai eu l'occasion d'y signaler ce que je devais à chaque écrivain

en particulier : c'est dans mon Ouvrage sur la *Théorie des sections coniques dans l'antiquité* (*Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*, 6e Række, 3e Bind, 1885. Édit. allemande de R. v. Fischer-Benzon. Copenhague, Andr.-Fred. Höst et Sön, 1886). Sans doute je ne traite là que de la Géométrie supérieure dans l'antiquité : mais celle-ci se rattache très étroitement, bien entendu, aux Mathématiques élémentaires, et j'ai dû, par conséquent, donner les raisons de ma conception de ces Mathématiques dans leurs parties essentielles — à son tour, cette conception est étroitement liée à presque toute la matière traitée dans le présent Volume.

Aussi vais-je me contenter de citer ici les savants dont les Travaux sur l'Histoire des Mathématiques ont influé, d'une manière ou d'une autre, sur mes propres études, et par là sur le présent Ouvrage : *Chasles, Bretschneider, Hankel, Cantor, P. Tannery, Heiberg, Allman* (1), puis encore, comme éditeurs, traducteurs et commentateurs, *Heiberg, Hultsch, Wertheim, Colebrooke, Woepcke, Boncompagni.*

Cependant, à ces citations générales, et à celles qui se trouvent déjà dans ma *Théorie des sections coniques dans l'antiquité*, il me faut ajouter encore les suivantes : c'est à P. Tannery (*Géom. grecq.*, p. 89 et suiv.) que je dois l'explication (p. 25-26) de ce qui est rapporté de la Géométrie de Thalès, ainsi que l'explication (p. 51) de la proposition de Pythagore que « les choses sont nombres » (*Géom. gr.*, p. 124) ; enfin, le solide et spirituel Ouvrage du même auteur, *Recherches sur l'Astronomie ancienne* (Paris, 1893), ne m'est tombé entre les

(1) Le vaste Ouvrage de LORIA, *Le Scienze esatte nell'antica Grecia*, (...), n'était pas encore paru.

mains que lorsque l'impression de mon livre était déjà commencée, mais il m'a permis néanmoins de refondre les paragraphes non encore imprimés sur la Géométrie calculante et la Géométrie sphérique des Grecs. Toutefois, dans un livre comme le mien, je ne pouvais utiliser qu'avec prudence ce que cet auteur qualifie lui-même expressément d'*hypothèses*; je ne le pouvais même point lorsque ses explications me semblent les plus naturelles, mais quand il s'agit cependant de faits sur lesquels la littérature conservée de l'antiquité ne nous fournit pas de données suffisantes.

Copenhague, septembre 1893.

AVANT-PROPOS DE L'ÉDITION ALLEMANDE.

Comme l'indique l'avant-propos qui précède l'édition danoise, ce livre était primitivement destiné à servir aux étudiants de notre Université : conformément au programme de l'examen pour le professorat dans cette Université, des paragraphes très importants dans notre exposition constituent presque un commentaire des *Éléments* d'Euclide ; aussi nous supposons ici que le lecteur est en mesure de vérifier lui-même les passages cités dans ces *Éléments*. Nous pensons, toutefois, que ce but un peu particulier ne doit pas être un empêchement à ce que ce traité serve également à l'étranger : car, pour arriver à bien comprendre l'évolution des Mathématiques, il faut au moins connaître, d'après l'original, l'œuvre qui joua le rôle capital durant toute cette évolution.

Ce qui, peut-être, devrait me donner davantage à réfléchir, c'est mon essai de vulgariser un Ouvrage historique en dehors de la sphère à laquelle je le destinais tout d'abord, alors que cet Ouvrage, au point de vue de l'Histoire, est fondé sur les travaux des contemporains : et, cependant, ce livre est bien le fruit du labeur original et personnel d'un ordre plutôt mathématique, à savoir d'une étude approfondie des grands écrivains pendant les périodes dont il est parlé. Ainsi, par exemple, dans cette étude, je n'ai pas voulu me con-

tenter de savoir que tel ou tel écrivain connaissait telle ou telle proposition, non plus que d'établir qu'il la démontrait de telle ou telle manière; mais, d'une façon plus précise, je me suis efforcé de comprendre pourquoi, étant données les conditions de l'époque, la proposition et sa démonstration devaient revêtir telle ou telle forme : or cela m'a coûté personnellement assez de temps, assez de réflexion pour que j'aie le droit d'estimer utile d'en exposer les résultats, pour ceux du moins qui ne sont pas en situation de disposer du temps et du travail nécessaires à pareille étude.

D'ailleurs la tâche que je me suis imposée coïncide, en plusieurs points, avec celle qu'a accomplie Hankel dans son livre *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), et je me hâte de faire remarquer que c'est précisément cet intelligent Ouvrage qui sut éveiller en moi le goût de telles études. Mais j'espère, cependant, que mon travail ne sera point superflu, car, d'une part, une mort prématurée empêcha Hankel de traiter plusieurs des parties les plus importantes et, en second lieu, j'ai pu m'appuyer sur des recherches historiques plus récentes qui permettent, sous maints rapports, d'arriver à des résultats tout autres que les siens : d'ailleurs, parmi les écrivains du temps présent, Paul Tannery est celui dont j'ai cru devoir le plus fréquemment m'approprier les vues.

Le plus important des changements entrepris dans la présente édition consiste en ce que j'ai pu m'appuyer, pour l'époque de Héron, sur les renseignements les plus modernes, et qui, du reste, s'accordent si bien avec l'impression que nous donnent les Ouvrages conservés de cet écrivain : ici, enfin, plus que dans l'édition danoise,

j'ai pu tenir compte des *Recherches sur l'Astronomie ancienne* de P. Tannery.

Je désire, en terminant, exprimer ma satisfaction que cette traduction ait été exécutée par la main experte et soigneuse du professeur v. Fischer-Benzon.

H.-G. Zeuthen.

Copenhague, juillet 189[illegible].

AVANT-PROPOS DE L'ÉDITION FRANÇAISE.

L'édition que M. Gauthier-Villars veut bien publier en français m'a permis de faire les additions et les corrections que peuvent nécessiter les progrès effectués, dans la connaissance de l'Histoire des Mathématiques, depuis l'apparition des autres éditions.

Je citerai, en première ligne, ceux qui sont dus à M. v. Braunmühl et qui sont consignés, en particulier, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, vol. I, 1900; au reste, les raisons que j'avais pour modifier un de ses résultats sont exposées dans un article de la *Bibliotheca mathematica*, 3e série, t. I. De même, j'ai pris en considération l'explication de M. Hultsch à propos des racines carrées d'Archimède, et il fallut tenir compte des quelques remarques critiques faites par M. Curtze dans une mention de l'édition allemande. Enfin, l'observation sur un calcul d'Hérodote (p. 46) est due à M. Heiberg.

Je dois encore remercier M. Jean Mascart pour les grands soins qu'il sut apporter afin de rendre bien exactement ma pensée; et les lecteurs, j'en suis sûr, sauront gré, comme moi, à M. Paul Tannery : ses annotations, marquées (T.), malgré leur étendue restreinte, comportent toutes des renseignements aussi intéressants qu'importants.

H.-G. ZEUTHEN.

Copenhague, septembre 1901.

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

DANS L'ANTIQUITÉ ET LE MOYEN AGE.

INTRODUCTION.

1. — Mathématiques préhistoriques.

Dans un Cours historique se pose toujours cette question : Où commencer?

On peut partir de l'instant où s'offrent des données effectives, dignes de foi, qui entraînent immédiatement une connaissance positive, certaine : c'est alors à l'historien d'établir exactement cette conséquence.

On peut encore partir de la *préhistoire*, qu'il faut alors déduire d'une foule de renseignements et de faits extrêmement divers qui, pris séparément, ne peuvent avoir la valeur historique de véritables sources. Dans ce cas, les données les plus voisines de l'Histoire proprement dite sont les traditions et légendes sur les mœurs et les événements, transmises par les plus anciens documents et concernant des époques plus lointaines encore. L'explication de ces légendes doit s'étayer sur des découvertes d'objets produits et employés à ces époques reculées, découvertes dont la signification s'éclaire en les comparant, en les situant, quant aux temps et aux lieux, pour contribuer, en revanche, elles-mêmes, à élucider les rapports qui ont existé entre les lieux où on les fait et à déterminer la succession, dans le temps, des races qui utilisaient ces ob-

jets; et, ce qu'on peut dire, à ces divers points de vue, des objets matériels sauvés du passé, on le peut également dire de ces mots que l'on rencontre en différentes langues connues, vivantes ou mortes, et dont l'âge peut être ainsi fixé : ils attestent l'antique notion des idées auxquelles ils correspondent.

Pour mettre en œuvre les matériaux acquis de la sorte, il faut recourir à d'autres ressources. Veut-on se faire une idée de la manière dont un objet a été produit et utilisé? dont une conception s'est formée, puis rattachée aux autres notions déjà existantes? Il faut savoir tout d'abord, d'une façon générale, comment un fait de cette nature peut avoir lieu et comment, étant données les ressources et les idées du temps telles qu'on peut se les représenter, il put effectivement être réalisé, et cette estimation est souvent malaisée, surtout pour un homme civilisé de notre temps accoutumé de se servir des moyens d'action actuels, tant matériels qu'intellectuels, ou de commodités qu'il s'est appropriées — sans même savoir exactement de quelle utilité elles lui peuvent être, non plus que celles qu'il pourrait ou non facilement remplacer. Pour avoir des données à cet égard, nous avons : d'abord, la ressource d'observer nos propres enfants et, d'autre part, les peuples non civilisés — ou autrement civilisés que nous; mais ce que révèle la préhistoire nous sert ici de récompense et nous aide à mieux comprendre le développement de la connaissance chez l'enfant, ainsi que les mœurs et usages des divers peuples.

On voit donc que, historiens et archéologues de profession, naturalistes et philologues classant, les premiers leurs trouvailles, les seconds les vocables d'après leurs âges et leurs rapports respectifs, pédagogues, psychologues, théoriciens de la connaissance, ethnographes, tous, doivent apporter leur contribution à une étude de la *préhistoire*. Si celle-ci porte sur une spécialité, c'est au spécialiste en question d'établir personnellement l'intime rapport des faits qu'on lui livre pêle-mêle; mais tous les savants énumérés ci-dessus trouveront à gagner, chacun pour leur branche, aux études préhistoriques ainsi dirigées.

Les Mathématiques ont aussi leur préhistoire, non des moins importantes.

Réduite à une matière étroite et bien délimitée, cette préhistoire peut conduire à des résultats relativement sûrs et clairs : on y apprend la manière dont les premiers peuples traitaient les grandeurs au moyen de nombres et de représentations géométriques, et c'est cela même qui nous permet de comprendre comment ils purent s'asservir la terre, qui nous facilite ainsi l'utilisation des renseignements que nous trouvons par ailleurs sur leur vie et leur activité. En nous montrant la base sur laquelle l'humanité devait édifier, plus tard, toute une mathématique mieux ordonnée, elle nous aide considérablement, somme toute, à pénétrer davantage le principe des premiers et plus importants concepts de cette Science, principe qui relève de la théorie de la connaissance.

Pour mettre en lumière la *préhistoire* des Mathématiques, il faut chercher chez les philologues quel est l'âge des dénominations des nombres les plus simples et quels moyens sont employés, en diverses langues, pour exprimer les nombres groupés par dizaines, vingtaines, etc., ou de quelque autre façon que ce soit, qui puisse servir à la division de mesures ou de monnaies (systèmes duo-, sexto-décimal, ...) ; il faut rechercher dans les inscriptions et les vieux monuments écrits les désignations, d'abord des nombres simples, lesquelles, pour la plupart, aux plus lointaines époques, consistent en une marque ou un signe pour chaque unité ; ensuite, les signes moins simples des nombres composés qui, par exemple, peuvent être figurés par répétition d'un signe pour chaque unité décimale — comme chez les Romains — ; il faut découvrir la trace première de l'emploi de ces signes, ou encore de moyens mécaniques pour l'exécution des calculs simples — et il est même possible de retrouver des signes d'opérations jusque dans l'écriture idéographique des anciens, comme dans les papyrus égyptiens où une patte d'oiseau, selon son orientation, indique très clairement si un nombre est à ajouter ou à retrancher, bref joue le rôle de nos signes + et —.

Quant à la conception de l'espace, le premier dessin que nous allons rencontrer sera la preuve qu'on se représentait des figures, dont les unes sont en petit ce que les autres sont en grand, c'est-à-dire des figures semblables ; et ce témoignage est d'autant plus probant que, la perspective ne pouvant être alors

connue, l'imitateur tendait à obtenir une similitude réelle, encore que souvent avec peu de succès. Cette intention doit nécessairement avoir été consciente si l'imitation présente le même nombre de dimensions que l'objet modèle, que ce soit une sculpture, par exemple, ou bien encore un objet qui, représenté par ses lignes de contour sur un plan, est lui-même plan ou peut être considéré comme tel. L'exemple vaut, principalement, si ladite représentation constitue par elle-même un modèle, comme une carte ou le devis d'un bâtiment, et d'autant mieux encore si l'on y peut voir un essai de figure géométrique. Au reste, pour l'application de pareilles figures à des buts pratiques, aux besoins de l'homme ou bien à l'enseignement des enfants, il est évidemment indifférent qu'elles soient dessinées un peu plus petites ou un peu plus grandes : nous aurons donc là, bien avant qu'il ait pu être donné de définition précise des figures semblables, une preuve de leur emploi conscient.

Une chambre funéraire de l'Égypte ancienne, de décoration inachevée, montre comment cette représentation a conduit jusqu'à méthodiquement obtenir la similitude. On y voit, en effet, que, pour reporter une image sur la muraille d'après une nouvelle échelle, on divisa cette muraille et l'image modèle en carrés, au moyen de deux systèmes de parallèles, puis que, dans chaque carré de la muraille, on inscrivit ce qui se trouvait dans le carré correspondant du modèle. En réalité, ce procédé consiste à appliquer des coordonnées rectangulaires exprimées en nombres entiers, en prenant pour unité le côté du carré : sont alors déterminés comme points correspondants ceux dont les deux coordonnées, chacune à chacune, se trouvent dans un rapport donné.

En poussant plus loin l'investigation des anciennes représentations ou décorations on doit surtout rechercher les figures qui nous peuvent révéler la notion de quelques constructions géométriques simples, ou qui témoignent tout au moins d'une conception géométrique des figures. On rencontre certainement des essais de perpendiculaires et de parallèles dès l'enfance même des civilisations ; chez des peuples plus développés, on a construit sûrement ces lignes par des moyens mécaniques (au début, peut-être, par des moyens

aussi simples que ceux que nous employons nous-mêmes pour tracer des lignes droites, des parallèles ou des perpendiculaires, au cordeau, ou encore en faisant un pli à notre papier, etc.). Une construction plus perfectionnée doit cependant avoir été usitée quand on appliqua ces lignes, comme nous le disions plus haut, à rendre un modèle avec une échelle nouvelle.

Des ornementations où les hexagones réguliers se trouvent employés de manière ou d'autre prouvent que l'on connaissait la construction simple de cette figure, dont le tracé n'exige même pas, il est vrai, de compas perfectionné ; mais, en revanche, chez des peuples d'assez haute culture, on chercherait en vain l'emploi du pentagone ou du décagone réguliers, figures dont la construction est aussi plus compliquée : on ne rencontre pas une seule fois ces polygones sur les vieux monuments d'Égypte.

Les restes de bâtisses conservés ont une non moindre signification que celle des dessins. Même aux premiers degrés du développement des peuples on remarque l'effort qui tend à donner au plan une figure déterminée, rectangle ou cercle ; dans les constructions plus parfaites, comme les temples et les pyramides d'Égypte, on dut recourir à des procédés géométriques pour établir les angles droits, ce dont il faut d'autant moins douter que les constructions sont exactement orientées aux points cardinaux : on savait donc tenir compte, pour obtenir cette orientation, de la culmination du Soleil. Les formes des pyramides témoignent de la notion de figures géométriques déterminées, et il fallut une grande précaution pour en assurer la configuration exacte, de même qu'une entente très sérieuse de la mécanique était indispensable pour obtenir l'équilibre de monuments aussi puissants que les temples égyptiens, fermes jusqu'à présent sur leurs bases, ainsi que pour le transport et l'érection des obélisques.

Je me suis efforcé d'exposer ici ce que l'on doit entendre par préhistoire de la mathématique et d'indiquer quelques-uns des moyens par lesquels on peut l'étudier ; j'espère, en même temps, avoir fait comprendre quelle peut être l'importance de cette étude, mais la brièveté de ces leçons ne me permet pas d'investigations plus complètes et plus rigoureuses

sur ce terrain : non seulement je dois dépasser les mathématiques préhistoriques mais aussi, en majeure partie, les mathématiques *préscientifiques*, et j'entends par là celles qui consistent, simplement, dans un ensemble de règles obtenues par empirisme ou par expériences fortuites, — ce fut peut-être le cas pour la division en six de la circonférence, — ou bien encore sans doute, à des époques plus anciennes, à l'aide d'investigations plus exactes aujourd'hui perdues et, conséquemment, préhistoriques. Je ne dirai des mathématiques préscientifiques que ce qu'il en faut strictement dire pour qu'on se fasse une idée des matières connues antérieurement aux mathématiques scientifiques, et qui ont servi de base pour les créer; aussi me faut-il donc, en introduction à la Géométrie grecque, exposer ce que les Grecs ont présumablement appris des Égyptiens et des Babyloniens.

Mais, en revanche, je ne pourrai traiter du calcul des Grecs que comme une introduction préscientifique à celui qui parut lorsque les Indiens inventèrent la représentation des nombres, usuelle aujourd'hui, à l'aide de chiffres avec valeur *de position*; le calcul numérique des Grecs était en effet bien inférieur, sous tous les rapports, à ce qu'ils savaient, par ailleurs, de mathématiques et, en second lieu, quoique leurs grands mathématiciens aient pu se servir avec succès de leurs signes numériques et de leurs moyens de calcul, nous n'en pouvons rien tirer qui dépasse ce que nous traitons autre part comme mathématiques préscientifiques. Ceci soit dit, toutefois, avec la restriction que, peut-être, après plus complet examen, ces procédés de calcul apparaîtront meilleurs qu'ils ne nous semblent actuellement [1].

Car, s'il est une erreur préjudiciable et qui l'ait été, non seulement pour des recherches historiques comme les nôtres, mais encore en ethnographie, c'est celle qui consiste à mesurer la valeur d'une chose découverte, uniquement par

(1) Paul Tannery, la plus haute autorité en pareille matière, a déclaré qu'en essayant de s'exercer pratiquement à l'usage des signes numériques grecs, il les a trouvés beaucoup plus appropriés au calcul qu'ils ne nous le semblent, habitués que nous sommes, dès l'enfance, au maniement d'un autre système de chiffres.

son rapport plus ou moins grand avec ce qu'emploie le civilisé d'aujourd'hui, ou à dédaigner ce que ledit civilisé ne croit pas pouvoir employer, simplement par ignorance ou inintelligence.

2. — Égyptiens et Babyloniens.

En ce qui concerne ces deux peuples, comme nous l'avons déjà dit, nous ne voulons mentionner que brièvement leurs connaissances et leurs aptitudes mathématiques, au temps où ils entrèrent en contact avec les Grecs, connaissances que ceux-ci auront pu leur emprunter.

Commençons tout de suite par les Égyptiens.

Les écrivains grecs, sans exception, nous apprennent que leurs plus anciens savants nationaux ont eu pour maîtres les Égyptiens, et rapportent encore comment leur fut ouverte la Science des prêtres d'Égypte. Ce furent, nous dit-on, les débordements du Nil qui conduisirent les Égyptiens à s'occuper de Géométrie car, une fois les inondations passées, on s'efforçait de réintégrer exactement chacun dans son fonds. Il est clair, en tous cas, que la très grande valeur des étroites mais fertiles bandes de terre sises entre le désert et le fleuve dut nécessiter un arpentage exact, et la haute importance des règles égyptiennes en cette matière ressort encore du fait suivant : lors même que les Grecs eurent si brillamment développé la Géométrie, ce furent encore ces propres règles qui, en substance, servirent aux arpenteurs (*agrimensores*) romains, lesquels ne comprenaient sûrement que d'une façon très restreinte les règles établies par les Grecs.

Peuple civilisé sous maint rapport, très commerçant et, de plus, bâtisseur comme nous l'avons signalé déjà, les Égyptiens ont eu besoin de certaines facilités de calcul et de notions géométriques plus étendues que celles usitées en arpentage; et nous trouvons encore une autre preuve de leur entente des mathématiques dans leur Astronomie dont l'importance, toutefois, était loin d'être comparable à celle de l'Astronomie babylonienne.

Quant à ce que surent les Égyptiens à une époque relativement moderne, nous le déduisons, partie de ce que les

Grecs et, postérieurement, les Romains ont appris d'eux, partie, par tradition directe, de quelques textes. En tous cas, cela ne paraît avoir que fort peu différé de ce qu'ils savaient déjà vers 1700 à 2000 avant J.-C., à savoir, d'après un papyrus fort antique, le *Manuel de calcul du scribe Ahmès :* aussi cette collection de problèmes, avec leurs solutions, est-elle la meilleure source où puiser quelque connaissance des Mathématiques et du Calcul égyptiens.

En utilisant cette source, ainsi que d'autres encore, nous ne voulons, conformément à notre plan, entrer dans aucun détail sur la manière dont les Égyptiens représentaient les nombres entiers et s'en servaient pour compter. Pour les fractions, ils les décomposaient en *quantièmes,* c'est-à-dire en fractions ayant pour numérateur *un;* le Manuel d'Ahmès contient une Table de pareilles décompositions de quotients, avec le dividende 2 et les diviseurs de 3 jusqu'à 99, Table qui se termine par $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$; d'ailleurs cette décomposition fut également employée par les Grecs et, quelque peu pratique qu'elle ait été en apparence, son usage a cependant fait remarquer la composition variée des nombres entiers.

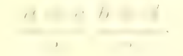
Dans leur calcul nommé *Hau,* les Égyptiens savaient résoudre des problèmes qui s'expriment, en notre langue mathématique, par des équations du premier degré à une inconnue : $ax + bx + cx + \ldots = d$, où a, b, c, $\ldots$, d sont des nombres entiers, ou des fractions elles-mêmes composées de quantièmes; ils traitaient en outre des problèmes qui appartiennent aux règles de société, quelques-uns même dont la solution demande des progressions simples, arithmétiques et géométriques.

Dans la solution de problèmes qui, posés algébriquement, auraient dépendu d'équations de la forme susexprimée, nous rencontrons pour la première fois un emploi de la méthode de la *fausse position*, que nous retrouverons souvent plus tard : elle consiste à substituer à x une valeur d'essai x_1; si l'insertion de cette valeur donne d_1 au lieu de d, alors

$$x = x_1 \frac{d}{d_1}.$$

En Géométrie, la détermination des surfaces devait, comme nous l'avons dit, constituer un des points capitaux.

Or, chez les Égyptiens, ainsi que chez plusieurs autres peuples, il était assez usuel de calculer la surface d'un quadrilatère de côtés a, b, c, d avec la formule inexacte



et l'aire d'un triangle de côtés a, a et b, avec la formule



limite de la précédente; mais ces formules ne donnent point, au reste, de mauvaise approximation, du moment que les angles du quadrilatère ou les angles adjacents au côté b du triangle s'écartent peu de l'angle droit : l'expression de la surface ne comporte alors qu'une erreur que nous pouvons appeler du *second ordre*. Bien que l'établissement de ces formules ait pu conduire à les employer en d'autres cas, les Égyptiens, autant qu'on le peut conclure avec quelque assurance de la grandeur des côtés dans les exemples rencontrés, les employaient de préférence là où elles fournissent une bonne approximation; au contraire, les arpenteurs romains, imitateurs des Égyptiens, allèrent jusqu'à les employer pour le triangle équilatéral bien qu'ils possédassent, pour ce cas, de meilleures méthodes de calcul.

Les Égyptiens calculaient la surface d'un cercle de diamètre d d'après la formule $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, ce qui revient à $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, ou 3,16 : les formules employées montrent que les Égyptiens, tout comme nous, ont utilisé comme unité de surface le carré dont on prend le côté pour unité de longueur; la construction d'angles droits, en terrain plan, s'opérait, semble-t-il, par celle d'un triangle ayant respectivement pour côtés 3, 4 et 5, et, dans la construction des Pyramides, ou du moins dans la détermination de leurs dimensions, on paraît avoir utilisé la grandeur du rapport entre la demi-diagonale de la surface de base et une arête, c'est-à-dire ce que nous ap-

pelons aujourd'hui le *cosinus* de l'angle que forme l'arête avec la surface de la base.

Si, du reste, dans un temps où la Géométrie grecque avait atteint un développement assez considérable, Démocrite pouvait encore alléguer, comme preuve de sa propre habileté en constructions géométriques, ce fait qu'il n'y avait jamais été surpassé par les Harpedonaptes (¹) égyptiens (tireurs au cordeau), c'est-à-dire par ceux qui, selon des rites solennels, avaient à veiller à ce que le plan des temples fût exactement orienté sur le Soleil, il est impossible que le savoir-faire de tels hommes se soit borné à l'emploi de constructions aussi simples que celles que nous venons de mentionner.

Tandis que les Grecs recevaient surtout l'impulsion des Égyptiens pour la création de la Géométrie, cette partie même des Mathématiques qu'ils devaient le plus perfectionner, les Babyloniens leur apprenaient l'Astronomie et l'exécution des calculs de cette Science : c'est là qu'il faut voir l'origine de la division de la circonférence, usuelle encore aujourd'hui, en degrés, minutes et secondes, d'après le système sexagésimal.

La division en $360° (= 2^3.3^2.5)$ tient peut-être bien à ce que l'année était anciennement supposée n'avoir que 360 jours; quant à l'extension de cette division sexagésimale, elle peut tenir, partie au même fait, partie aux avantages reconnus d'un système où le nombre fondamental $2^2.3.5$, étant composé des plus petits nombres premiers, renferme comme facteurs une très grande partie des nombres inférieurs. On a trouvé des témoignages de l'emploi conséquent de ce système numéral dans des inscriptions formant des Tables de nombres carrés jusqu'à 60^2 et cubiques jusqu'à 32^3, sexagésimalement écrits : ces inscriptions sont vieilles de quelques mille ans.

Il est également vraisemblable que diverses spéculations numériques, d'où résulta mainte recherche des Grecs sur les nombres entiers, doivent leur origine au mysticisme des Chaldéens et des Babyloniens.

(¹) Le mot est grec; on suppose qu'il traduit un terme égyptien. (T.)

LES MATHÉMATIQUES GRECQUES.

I. — Aperçu historique.

Comme, en traitant des Mathématiques grecques, nous devrons souvent poursuivre, au cours de longues périodes, des sujets particuliers, il sera utile de jeter dès l'abord un coup d'œil historique où nous exposerons dans quel ordre chronologique les développements de notre Science s'effectuent peu à peu, et quels mathématiciens y travaillèrent, où nous éluciderons, d'autre part, dans quelles conditions ces mathématiciens exercèrent leur activité.

Un point central dans les mathématiques grecques, est Euclide, qui vivait vers 300 avant J.-C.

Nous possédons, dans ses *Éléments*, un Traité de Géométrie qui sert toujours, dans plusieurs contrées, d'œuvre didactique et qui renferme le corps des doctrines géométriques élémentaires dont, encore aujourd'hui, les principes essentiels sont partout, sous diverses formes, à la base de l'enseignement. D'une part, c'est dans cet Ouvrage que nous devons chercher des éclaircissements aux données éparses que nous avons sur les Mathématiques grecques antérieures, car ces données convergent à la naissance de la Géométrie euclidienne ; d'autre part, cet Ouvrage doit nous fournir les éléments nécessaires pour comprendre les écrivains postérieurs, car il fut le fondement sur lequel ceux-ci continuèrent de bâtir. Même en ce qui regarde l'histoire extérieure de notre Science, Euclide est donc bien central : il fut le premier grand mathématicien de l'École dite *d'Alexandrie*, et son travail eut lieu dans d'autres conditions que celles de ses prédécesseurs.

Le développement des Mathématiques *anté-euclidiennes* embrasse les trois siècles précédents qui ont, chacun, un caractère distinct.

Le premier mathématicien grec fut Thalès de Milet qui prédit l'éclipse solaire du 28 mai 585 ; pour cela, il doit avoir

employé des règles directement venues d'Égypte et confirmées par de longues années d'observations, de même que la plupart de ses connaissances mathématiques émanent sûrement des Egyptiens. L'important, toutefois, c'est que, avec lui et l'École philosophique qu'il fonda — dite *ionienne* — non seulement les Grecs commencèrent à réunir en corps la Science mathématique qu'ils pouvaient tenir des Égyptiens, mais aussi qu'ils se mirent à étendre cette science en divers sens; ce travail du VI[e] siècle eut son mouvement initial sur la côte d'Asie Mineure et, par les actives relations commerciales, ne tarda pas à se transplanter en d'autres contrées où les Grecs s'étaient établis.

Aussi, au V[e] siècle, voyons-nous le foyer central du développement des Mathématiques en un tout autre milieu, à savoir l'Italie méridionale. En ce siècle on avait reconnu que les vérités mathématiques, peu à peu ramassées et découvertes, avaient besoin de fondements sûrs et, cependant qu'on établissait ces fondements, l'on utilisait les résultats démontrés comme points de départ d'extensions nouvelles et importantes.

L'homme à qui, du moins, la tradition attribue le plus d'influence sur cette élaboration, est Pythagore de Samos; aussi parlons-nous de lui au V[e] siècle, bien que son action personnelle soit partiellement antérieure à l'an 500 : dans la Grande-Grèce, comme on nommait alors les florissantes colonies grecques de l'Italie méridionale, il fonde une école philosophique qui s'isola hermétiquement et chercha, semble-t-il, par des cérémonies mystiques et le secret de ses doctrines, à se maintenir dans son isolement; cette école aristocratique devait aussi tenter de l'action politique, mais elle excita la malveillance des profanes et fut dispersée quand les démocrates tirèrent à eux le pouvoir dans la Grande-Grèce.

Beaucoup plus tard, les néopythagoriciens prétendirent que leurs doctrines, pour la plupart religieuses et éthiques, remontaient à Pythagore, et ils entourèrent leur soi-disant père spirituel de tant de légendes qu'il est difficile d'y découvrir la part de vérité qu'elles peuvent contenir; ce qui, dans ces récits, peut avoir quelque intérêt pour nous se rapporte à ses voyages en Égypte, où il put fort bien aller

— comme plus tard Platon et Eudoxe — et à un voyage très douteux en Babylonie. L'isolement de son école fut important pour le développement des Mathématiques : il assura l'active communauté dans le travail à des hommes qui se comprenaient les uns les autres; mais il est cause également que nous savons bien mal ce qui revient au maître et ce qui revient aux disciples.

Plus tard, la dispersion de l'école fit répandre ses doctrines mathématiques sur les différentes contrées où le peuple grec s'était établi; mais, en d'autres lieux, ces doctrines fusionnèrent certainement avec les résultats du travail exécuté par d'autres dans le domaine philosophique ou mathématique, aussi n'est-il pas aisé de discerner dans les Mathématiques de l'Abdéritain Démocrite (né vers 460 avant J.-C.) la part plus ou moins grande qu'un penseur aussi original doit aux pythagoriciens.

Hippocrate de Chios, un peu plus âgé, résidait à Athènes et y enseignait les Mathématiques après avoir été marchand et avoir perdu son bien; il a peut-être appris diverses choses des pythagoriciens, mais il n'appartient nullement à leur école et acquiert à nos yeux une importance particulière parce que nous avons de lui un morceau complet de Géométrie, le seul échantillon de cette espèce qui nous ait été conservé du ve siècle; en outre, il vécut à Athènes, en cette ville même qui se disposait à devenir déjà le foyer de la vie intellectuelle, de l'Art et de la Science hellènes, le champ des luttes entre les philosophes et les sophistes, parmi lesquels Hippias d'Élis, par exemple, fut un mathématicien de valeur, la ville enfin qui allait devenir, au siècle suivant, le centre du développement des Mathématiques.

Dans l'Italie méridionale, cependant, se poursuivait le développement des théories pythagoriciennes, et un mathématicien remarquable, Archytas de Tarente, que nous y trouvons précisément à la fin du ve siècle, est expressément désigné comme le dernier pythagoricien d'importance : il vivait dans sa ville natale où il était considéré, tant comme homme d'État et capitaine que comme mathématicien.

C'est grâce à Archytas que le développement acquis par la vieille école pythagoricienne, et ses successeurs immédiats,

aboutit à ceux-là mêmes qui seront les chefs du mouvement mathématique au IVe siècle, à savoir Platon d'Athènes et Eudoxe de Cnide : car tous deux, dans leurs voyages d'étude en Grande-Grèce, connurent Archytas et subirent son influence.

Avant d'entrer dans des détails sur ces deux hommes et leurs écoles, je veux, à mes remarques sur les deux siècles précédents, ajouter ici celle qui peut caractériser le IVe en général : dès cette époque, il était clair qu'une pleine exactitude ne peut s'obtenir en mathématiques que par l'édification d'un système bien coordonné et c'est, en partie grâce aux tentatives répétées pour construire de tels systèmes, en partie grâce au progrès des méthodes nécessaires à l'extension et à l'amélioration de la matière, qu'on porta la Géométrie élémentaire au point où nous la trouvons chez Euclide. En même temps, on avait commencé de développer une Géométrie supérieure dans laquelle la théorie des sections coniques atteignit à la plus haute importance.

Platon (429-348) est le grand philosophe, disciple de Socrate et fondateur de l'école qui fut appelée *Académie*, de l'endroit d'Athènes où elle se groupait autour du maître. Platon n'emprunta pas son goût des mathématiques à Socrate, car celui-ci eût voulu les restreindre aux seuls usages pratiques, mais aussi Socrate ne fut-il pas son seul maître et, après la mort de celui-ci, il eut l'occasion, d'abord à Cyrène, puis dans la Grande-Grèce, de s'initier aux Mathématiques et à la philosophie des pythagoriciens : à Cyrène, il étudia les Mathématiques auprès du même maître qu'un autre Athénien, de grande valeur comme mathématicien, Théétète, nom qu'il a attribué à l'un de ses Dialogues — peut-être même furent-ils ensemble à Cyrène [1]; — en Sicile, il se lia d'amitié avec Archytas. Platon visita également l'Égypte.

Si nous voulons comprendre exactement en quoi consista l'influence de Platon sur la marche des Mathématiques, nous rencontrons les mêmes difficultés que pour Pythagore : de même que les néopythagoriciens le faisaient envers Pytha-

---

(1) Le *Théétète* de Platon présente Théodore de Cyrène comme professant à Athènes au temps de Socrate; ce qui constitue un témoignage beaucoup plus assuré que ceux qui se rapportent au prétendu voyage de Platon à Cyrène. (T.)

gore, les académiciens nouveaux attribueraient volontiers à Platon tout l'honneur possible; non qu'ils lui assignent des recherches mathématiques personnelles d'importance notable, mais ils se montrent plutôt enclins à lui attribuer les méthodes qui furent employées de son temps, comme ils le sont aussi à le faire passer pour le conseiller de ceux qui firent faire aux Mathématiques des progrès proprement dits.

Quelque peu vraisemblables que soient ces données, Platon n'en reste pas moins celui des disciples de Socrate qui, avant tous les autres, fut le promoteur du développement intellectuel, celui qui attira à Athènes les hommes avides de savoir de tous les pays et colonies grecques : qu'il se soit vivement intéressé aux Mathématiques et à leur progrès c'est là, en tout cas, un fait de la plus haute importance. Qu'il ait fait écrire à l'entrée de l'Académie : μηδεὶς ἀγεομέτρητος εἰσίτω — nul n'entre ici s'il n'est géomètre — n'est peut-être en vérité qu'une légende, mais il ressort néanmoins de ses propres œuvres qu'il considérait une certaine culture géométrique préalable comme nécessaire à l'intelligence de la Philosophie, et l'usage qu'il fait dans le *Timée* des cinq polyèdres réguliers leur a valu le nom, qu'ils conservent, de *solides de Platon*.

Après lui, le grand philosophe Aristote, qui s'est beaucoup occupé des Sciences naturelles, montra aussi quelque goût pour les Mathématiques, sans toutefois faire preuve nulle part d'une entente particulièrement prononcée de ces sciences, mais l'attitude de ces deux hommes fut telle que les mathématiciens purent trouver place dans les sociétés savantes de l'époque, l'école académique de Platon et la péripatéticienne d'Aristote, qu'ils y purent travailler de concert avec d'autres penseurs, s'y faire comprendre, et que les Mathématiques et la Philosophie purent se donner une impulsion réciproque, tant par leurs relations pacifiques que par leurs discordes mêmes : de la sorte, les Mathématiques devinrent un élément de la haute culture grecque et la forme, le ton qu'elles assumèrent à cette époque, laisse au mieux reconnaître qu'elles se sont développées dans des cercles de fine éducation où les penseurs avaient des prétentions à s'exprimer avec correction.

Une école eut, toutefois, pour le développement des Mathématiques, une importance plus directe encore que ces illustres écoles de Philosophie : l'école mathématicienne et naturaliste qui se groupa, au temps de Platon, dans la ville commerciale de Cyzique, sur la mer de Marmara, autour du très estimé médecin, astronome et mathématicien, Eudoxe de Cnide.

Jeune homme, Eudoxe avait visité la Grande-Grèce et l'Égypte ; à cette époque il n'y avait presque plus rien à apprendre en Géométrie dans cette dernière contrée pour un mathématicien grec, mais, en revanche, en Astronomie, les antiques observations des Égyptiens lui furent d'une très grande utilité et il sut en tirer fort bon parti, puisqu'on lui doit d'avoir fondé uniquement l'Astronomie sur l'observation et sur l'investigation géométrique, à l'exclusion de l'Astrologie et des vides spéculations; dans l'Italie méridionale Eudoxe étudia la Médecine et la Géométrie, celle-ci auprès d'Archytas.

La liaison de leurs deux fondateurs avec les pythagoriciens fut certainement un gage de bonne collaboration pour les deux écoles de Platon et d'Eudoxe, collaboration qui parfois tourna pourtant en luttes querelleuses. Les relations entre les deux écoles d'Athènes et de Cyzique ne se bornent pas, d'ailleurs, aux rapports fortuits auxquels pouvait prêter l'actif commerce d'une ville à l'autre; Eudoxe a visité Athènes avec ses disciples qui ont alors entendu les leçons de Platon : plusieurs d'entre eux doivent avoir même adhéré à sa philosophie. Les élèves les plus connus d'Eudoxe furent les frères Ménechme et Dinostrate; et Ménechme écrivit sur la politique, dit-on, comme un platonicien.

Maintenant, quels résultats a-t-on obtenus dans ces trois siècles passés en revue, quelles formes de démonstrations et d'exposition se sont développées? c'est ce que l'on apprendra fort clairement par les ressources que nous offre à ses débuts l'école alexandrine qui va suivre, par les propositions dont se sert Platon dans ses Dialogues, et par l'étude des formes logiques instituées par Aristote. Les matières sur lesquelles ces dernières ont pu s'employer le plus simplement et le plus exactement sont les Mathématiques; elles se sont alors sûrement développées, précisément par l'usage qu'en faisaient les

mathématiciens, et nous soulignons l'exemple de l'avantage que la Philosophie a remporté de sa collaboration (ci-dessus mentionnée) avec les Mathématiques.

Si, dans ce qui va suivre, nous ne nous contenterons pas de dire, comme un fait, à quel point les Mathématiques en étaient arrivées mais si nous rendons compte, en même temps, et du mérite qui revient à chacun dans cette œuvre, et de l'enchaînement successif des idées les unes aux autres, c'est qu'en cela nous nous appuyons sur les assertions concernant notre sujet qui sont disséminées dans des écrivains postérieurs, et aussi sur un historien des Mathématiques de la fin de la période que nous envisageons, le péripatéticien Eudème de Rhodes; sans doute nous ne possédons pas non plus son œuvre, mais certains extraits importants en ont été conservés par des écrivains plus récents.

C'est par un de ces extraits, donc de troisième main, que nous connaissons les fragments dont nous avons parlé, d'Hippocrate de Chio.

Ce coup d'œil sur les trois siècles écoulés a pu évoquer en nous une image un peu trouble : les Mathématiques naissent sur les côtes d'Asie Mineure ; ensuite leur développement dans l'Italie méridionale attire surtout notre attention ; après quoi c'est Athènes qui, par sa supériorité intellectuelle universelle, capte les mathématiciens.

Sans doute leur étude se poursuit aussi en d'autres lieux, comme en Grande-Grèce où, un siècle et demi après Archytas, le plus grand mathématicien devait naître aux Grecs en la personne d'Archimède, mais la conséquence de l'hégémonie intellectuelle exercée par Athènes sur le monde entier fut que les travaux des mathématiciens qui y vécurent étaient les moins sujets à l'oubli : la grande extension de l'étude des Mathématiques pendant cette époque a pour raison, en partie l'activité des rapports commerciaux entre les Grecs disséminés, en partie les guerres nombreuses et les troubles politiques qui chassèrent les hommes éminents d'un endroit à l'autre. Ceux qui purent demeurer au même endroit, comme ce fut le cas à Athènes, y étaient soumis à des inquiétudes analogues.

En même temps, les mathématiciens eurent sans doute à

soutenir aussi toutes sortes de luttes intellectuelles, soit entre eux, soit contre les sophistes et les philosophes.

Ce fut dans de telles conjonctures que, non seulement les Mathématiques acquirent tant d'extension en maintes contrées et parmi les savants de toutes sortes, mais qu'elles se munirent encore de tous ces moyens d'exactitude dans la démonstration et dans l'exposition, moyens que nous admirons si fort encore aujourd'hui : pour la démonstration, en principe, nous n'avons rien de mieux à faire que de les imiter; pour ce qui est de la forme d'exposition, nous devons cependant dire que l'exactitude y était obtenue aux dépens de l'intelligibilité, au point que ce fut plus tard la cause qu'on rétrograda quand se perdit la tradition orale, et que l'entière intelligence des profonds mathématiciens grecs n'a été retrouvée qu'en nos temps modernes où les Mathématiques, quoique toujours un peu sous l'influence grecque, ont su de nouveau s'élever peu à peu à la même hauteur sur les mêmes domaines.

Cette décadence des Mathématiques à laquelle nous venons de faire allusion ne commença pas, toutefois, comme pour la poésie, l'éloquence, les autres arts et la Philosophie, au moment où les circonstances extérieures, après la mort d'Alexandre le Grand, furent si essentiellement modifiées : au contraire, c'est alors qu'eut lieu le plus riche épanouissement des Mathématiques.

Comme on le sait, dans le partage de l'empire, Ptolémée, fils de Lagus, obtint l'Égypte avec la ville nouvelle d'Alexandrie : lui et ses successeurs firent de cette ville, non seulement le plus important centre commercial, mais un foyer scientifique de premier ordre. C'est sous son règne et ceux de ses successeurs immédiats, qui s'appelèrent aussi Ptolémée, que fut fondé le Muséum où des savants, sans souci de leur entretien, purent vivre pour la Science. Les Ptolémées fondèrent et agrandirent la bibliothèque alexandrine, où peu à peu furent rassemblées des copies de toutes les œuvres grecques importantes qu'on put se procurer : comme dans une université moderne, la jeunesse grecque studieuse se rassemblait à Alexandrie et y suivait l'enseignement des érudits de l'endroit, en grammaire et en Mathématiques.

Ces conditions ne pouvaient qu'être utiles aux Mathématiques, qui ont besoin de paix, aussi bien pour réunir en solides faisceaux de systèmes les nombreux résultats acquis, mais épars, que pour employer les fécondes méthodes conquises à s'élever plus haut encore qu'auparavant. Il fallait du calme pour que se poursuivît l'enseignement oral sans lequel les grandes œuvres écrites n'eussent été que peu accessibles. En outre, les Mathématiques étant devenues une science spéciale, il y fallait des spécialistes qui n'eussent pas perpétuellement à se quereller avec les philosophes sur leur propre Science, ou bien à faire eux-mêmes de la Philosophie.

Cette spécialisation de l'érudition alexandrine n'empêchait pourtant point qu'un seul et même homme exerçât son activité dans plusieurs branches, et ce fut le cas pour Ératosthène de Cyrène, par exemple, qui vécut dans la dernière moitié du IIIe siècle et fut pendant un certain temps directeur de la Bibliothèque alexandrine : outre la Philosophie et la Grammaire, il s'occupa de Géographie, — de haute Géodésie même : il entreprit la première mesure d'un degré du méridien, — de Chronologie et de Mathématiques.

La paix qui favorisa les mathématiciens d'Alexandrie pouvait bien entraîner aussi quelques inconvénients : l'orgueil, par exemple, et les coteries; on ne doit donc pas regretter que le plus grand mathématicien de ce temps, Archimède, n'ait pas vécu à Alexandrie, mais à Syracuse.

C'est de là que, successivement, il envoyait travaux achevés et résultats provisoires à Alexandrie. Certains mathématiciens de cette ville voulurent, il est vrai, s'approprier quelques-uns de ses résultats, dont ils établissaient la démonstration après lui, mais il les mystifia un beau jour en leur communiquant des résultats faux dont ils firent aussi des démonstrations. Du reste, le séjour d'Archimède hors d'Alexandrie eut ceci d'utile, pour notre connaissance de ses œuvres, qu'il dut beaucoup rédiger par écrit, tandis qu'étant à Alexandrie il se serait contenté de communications orales à son entourage et à ses élèves ou, du moins, le cas échéant, il eût écrit simplement sous une forme appropriée à ceux-ci.

Les mathématiciens de cette période qui nous ont laissé des Ouvrages importants de Mathématique pure (Géométrie)

et qui ont certainement de beaucoup dépassé les autres mathématiciens notables de leur temps sont : Euclide (environ 300 ans avant J.-C.), Archimède, mort en 212, et Apollonius (environ 200 ans avant J.-C.).

On sait peu de particularités sur la vie d'Euclide, mais nous possédons, outre ses *Éléments* déjà cités, une autre œuvre élémentaire qui s'intitule ordinairement d'un nom latin : *Data*. On connaît encore, sous une forme plus ou moins authentique, un écrit sur la *Division des figures;* une œuvre astronomique : les *Phénomènes* et une *Optique* qui contient les propositions les plus simples sur la perspective. Ses quatre livres de *Sections coniques* et ses deux livres des *Lieux en surface;* ses *Porismes* et un écrit sur les *Fausses conclusions* ont été perdus. On en peut cependant deviner le contenu d'après des collections postérieures de *lemmes* et d'après des commentaires : les *Porismes,* par exemple, comprenaient plusieurs des propositions sur les transversales et les divisions homographiques, dont s'occupe aujourd'hui la Géométrie projective.

Archimède vivait à Syracuse, où il était fort considéré, et ami du roi Hiéron. Il trouva la mort lors de la prise de Syracuse par les Romains après avoir, de diverses manières, appliqué sa science de la Mécanique à défendre la ville. Il a sûrement visité Alexandrie pour y lier des relations avec ceux à qui, plus tard, il envoyait ses écrits; voici ce qui nous en reste : sur *la Sphère et le cylindre, Mesure du cercle,* sur les *Conoïdes et les sphéroïdes,* sur les *Spirales,* sur l'*Équilibre des figures planes, Calcul du sable, Quadrature de la parabole,* et sur *les Corps flottants,* le dernier Ouvrage en traduction latine seulement. Nous avons de plus, par les écrivains grecs postérieurs et la tradition arabe, quelques fragments, parmi lesquels un Ouvrage sur les *Solides demi-réguliers* et une série de propositions géométriques que nous appellerons *Lemmes d'Archimède :* ces lemmes, toutefois, sont peut-être partiellement d'origine plus récente.

Apollonius de Perga travailla sûrement à Alexandrie : on a conservé sept de ses huit livres sur les *Sections coniques;* les quatre premiers existent en grec, et les trois suivants sont

connus par une traduction arabe. C'est de la même source que nous tenons un Traité de la *section de raison*, tandis que nous ne connaissons que par des relations postérieures ses écrits sur la *section déterminée*, la *section de l'espace*, les *contacts* et les *intercalations*. Il semble aussi qu'Apollonius contribua beaucoup à l'application des Mathématiques à l'Astronomie.

Citons parmi les contemporains, les prédécesseurs et les successeurs immédiats de ces trois grands géomètres : Aristée, un peu plus vieux qu'Euclide, qui avait écrit des Ouvrages perdus sur les *Lieux solides* et les *Polyèdres réguliers*; Eratosthène, que nous avons déjà nommé; Nicomède, qui vécut entre Archimède et Apollonius; Dioclès, Persée, Zénodore et Hypsiclès. Ce dernier écrivit, sur les *polyèdres réguliers*, un livre qu'on a coutume d'admettre dans les éditions vulgaires des *Éléments* d'Euclide comme Livre quatorzième. Quant aux autres, nous ne les connaissons guère que par les titres de quelques écrits perdus, ou certains résultats isolés que mentionnent de plus récents écrivains.

Même après l'époque que nous venons d'esquisser, nous rencontrerons d'importants progrès en des branches particulières de la Mathématique grecque, surtout en celles qui s'appliquent à l'Astronomie et, encore que nous n'écrivions pas une histoire de cette dernière Science, nous jetterons cependant ici un coup d'œil sur les écrivains astronomes des diverses époques de l'antiquité grecque qui, par leurs travaux intéressant les Mathématiques, méritent une mention particulière.

Nous eûmes déjà l'occasion de dire qu'Eudoxe, auquel les Mathématiques sont redevables de leurs plus profondes méthodes, avait également fondé l'Astronomie grecque scientifique qui, pourtant, subit assez vite une influence extérieure, car l'expédition d'Alexandre le Grand fit connaître aux Grecs la vieille Astronomie chaldéenne. Les grands mathématiciens alexandrins furent, avons-nous dit, en même temps astronomes; parmi eux, et notamment entre Euclide et Eratosthène, nous devons placer Aristarque de Samos (environ 270 ans avant J.-C.) qui avait édifié déjà sur le système du monde l'hypothèse que reprit Copernic dix-huit siècles plus tard : les travaux de Géographie mathématique

d'Ératosthène durent servir, entre autres choses, à la réduction des observations faites ailleurs par les astronomes chaldéens.

C'est à Apollonius que, certainement, reviennent bon nombre des théories qui furent la base des progrès réalisés à l'époque suivante par les astronomes grecs au point de vue du calcul et de l'observation; ses successeurs immédiats furent sans doute des Alexandrins, mais l'homme qui prit le premier rang parmi les astronomes grecs, Hipparque de Nicée (150 ans environ avant J.-C.), fit ses observations à Rhodes, il utilisa, en en tirant tout le parti possible, les antiques observations des Chaldéens, et c'est à peu près de son temps que date l'apparition de l'influence orientale par la division de la circonférence en 360° et l'emploi général du système sexagésimal dans les calculs astronomiques et trigonométriques.

Parmi les astronomes plus récents il faut, dans l'histoire des Mathématiques, nommer Ménélas d'Alexandrie (dernière moitié du Ier siècle après J.-C.) dont nous connaissons trois livres sur la *Géométrie sphérique,* par des traductions hébraïque et arabe et, surtout, Ptolémée, d'un demi-siècle plus jeune : c'est par sa Syntaxe Μεγάλη σύνταξις, mieux connue sous le nom arabe défiguré d'*Almageste*, que nous savons le plus complètement l'Astronomie grecque (dans le système dit *de Ptolémée*) et la Trigonométrie qui s'y rattache; au reste, la majeure partie de ce que nous trouvons chez lui émane d'astronomes antérieurs, particulièrement d'Hipparque, dont il ne nous est resté que fort peu de chose.

Tandis que, même après l'époque des grands mathématiciens, l'application des Mathématiques à l'Astronomie imprimait en retour à leur développement une impulsion en avant, il n'en fut point de même pour leur application à l'Arpentage et à la Mécanique pratique : le fondement théorique de l'Arpentage se trouvait déjà dans la Géométrie grecque et ce qui, en Mécanique théorique, vient de l'antiquité, c'est Archimède qui le développa le plus clairement et le plus complètement. Qu'Archimède et ses contemporains aient fait un important usage de la Mécanique pratique, nous le savons par des témoignages postérieurs et

il ressort de l'origine égyptienne et du nom même de la Géométrie grecque qu'elle s'appliqua dès ses débuts à l'Arpentage : son nom, en effet, signifie exactement *mesurage du sol* quoique, dès le temps d'Aristote, l'Arpentage portât le nom spécial de *Géodésie*. En même temps que l'Arpentage, et au même titre, la Logistique, ou calcul, fut abandonnée comme non scientifique par les géomètres proprement dits : aussi les *Éléments* d'Euclide font-ils aussi peu de cas de l'Arpentage que des autres usages numériques des Mathématiques.

Une conséquence regrettable fut que nous ne savons point par voie directe comment, aux meilleurs jours des Mathématiques grecques, on s'y prenait pour utiliser pratiquement les résultats de cette science et, outre les écrivains astronomiques, ce sont des écrivains encore plus récents qui nous doivent renseigner à cet égard ; parmi eux une mention spéciale est due à Héron d'Alexandrie, dont jusqu'à présent on avait placé l'existence peu après la meilleure époque de l'alexandrinisme, mais qui, d'après les plus récentes recherches, semble avoir vécu au plus tôt au IIe siècle après J.-C. ou vers la fin du Ier : ses travaux, où l'on rencontre de bonnes méthodes grecques à côté de formules approximatives égyptiennes de valeurs diverses ([1]), ont joué un rôle important, car ils enseignèrent l'Arpentage et autres usages pratiques de la Géométrie pendant la longue période où l'on perdit l'intelligence de la Géométrie grecque exacte, ou même pendant laquelle on ne la connaissait pas du tout, et ils sont rendus précisément aptes à ce rôle parce qu'ils traitent de nombreux problèmes numériques.

L'importance d'Héron pour l'histoire des Mathématiques consiste encore en ce fait qu'il nous fait passablement concevoir jusqu'à quel point et de quelle sorte étaient exécutées les opérations numériques correspondant aux résultats scientifiques de la Géométrie grecque.

([1]) L'Ouvrage original de Héron, les *Métriques*, a été récemment retrouvé, mais est encore inédit ; jusqu'à sa publication, on ne peut porter un jugement précis sur l'origine et l'histoire de ces formules approximatives, conservées en fait par la tradition byzantine qui a singulièrement altéré l'œuvre héronienne. (T.)

Cependant, dès le début de notre ère, le développement des Mathématiques grecques, au moins en ce qui fait leur grandeur, s'était arrêté. Pour en comprendre la raison, qu'explique la constitution propre à ces Mathématiques, il les faut d'abord connaître elles-mêmes; nous pouvons seulement remarquer ici que les circonstances extérieures favorables au milieu desquelles on avait travaillé dans la première partie de la période alexandrine n'existaient plus : déjà, sous quelques-uns des Ptolémées postérieurs, les savants furent en moins bonne situation que sous les premiers rois de ce nom, mais les conditions favorables cessèrent tout à fait lorsque, au milieu du dernier siècle avant J.-C., les Romains devinrent maîtres d'Alexandrie comme ils l'étaient déjà de la plupart des contrées où habitaient des Grecs. En Mathématique, en effet, ils ne se montrèrent nullement disciples studieux des vaincus.

Au cours des années, la bibliothèque d'Alexandrie, destinée à être le dépôt des acquisitions scientiques, subit plusieurs incendies, et si Alexandrie n'en continua pas moins d'être le lieu du monde où se conserva le mieux l'intelligence des vieilles Mathématiques, où même elle eut parfois des retours d'éclat, cela tient sûrement à ce qu'elle fut toujours le point où se trouvaient conservés la plupart des Ouvrages.

Pappus y vécut à la fin du IIIe siècle après J.-C.; ce ne fut pas, sans doute, un grand mathématicien en comparaison de ceux qui, aux temps des Ptolémées, travaillaient dans cette ville, mais sa *Collection mathématique* a pris une importance inappréciable grâce aux éclaircissements qu'elle nous a directement apportés, ou indirectement par des séries de lemmes, sur des Ouvrages, maintenant perdus, des grands mathématiciens grecs.

Dans une seule branche des Mathématiques, au temps de Pappus, on trouva pourtant quelque chose de neuf encore : c'est en Arithmétique. De la période qui s'étend entre les grands mathématiciens et Pappus, nous avons les Travaux de plusieurs arithméticiens, parmi lesquels Nicomaque (environ 100 après J.-C.) jouit surtout d'une grande considération : il écrivit une *Introduction arithmétique* qui fut conservée. Mais la raison pour laquelle lui et quelques autres arithméticiens semblent nous offrir du nouveau est que, à peu d'excep-

tions près, les recherches d'Arithmétique de la meilleure époque ne nous sont pas parvenues.

En revanche, les Ouvrages que nous possédons de Diophante, contemporain de Pappus, affectent une telle originalité qu'il nous faut bien y voir un élargissement réel des Mathématiques grecques; on nous a conservé, de sa main, la majeure partie d'un grand Ouvrage intitulé *Arithmétique*, encore que nous ignorions si un petit écrit touchant les nombres figurés faisait corps avec cette œuvre.

2. — Les Mathématiques pythagoriciennes.

Si, maintenant, nous considérons le contenu mathématique de la Géométrie grecque en la prenant dès l'époque la plus reculée, nous ne savons qu'extrêmement peu de choses touchant le VIe siècle. Sans doute Eudème attribue à Thalès différentes propositions parmi lesquelles il peut fort bien avoir connu celle-ci :

« L'angle inscrit dans une demi-circonférence est un angle droit, »

qu'il l'ait, au reste, trouvée lui-même ou l'ait tenue des Égyptiens : cette proposition, en effet, se déduit sans aucune difficulté du fait facilement constatable qu'un rectangle peut être inscrit dans une circonférence.

En revanche, il est difficile de trouver quelque sens à l'affirmation d'Eudème qui attribue à Thalès d'avoir démontré que le diamètre partage un cercle en deux parties égales : à cette époque, on n'aurait vu aucune nécessité de démontrer un fait d'une telle évidence. Toutefois, Eudème veut peut-être dire que la connaissance de cette proposition considérée, de son temps, comme indispensable pour la démonstration du théorème sur l'angle inscrit dans un demi-cercle, dut également être nécessaire à Thalès, et il ne faut pas non plus attacher d'autre importance à la mention qu'il fait encore des théorèmes suivants :

« Quand deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux; de même les angles à la base d'un triangle isoscèle » ;

« On détermine un triangle à l'aide d'un côté et des deux angles adjacents ».

Cette dernière proposition, en particulier, n'acquiert toute sa valeur théorique que si on la présente avec d'autres propositions semblables, qui lui sont connexes, et comme on ne dit pas si Thalès connut ces propositions, il faut y voir comme explication que la tradition aurait mis sur le compte de Thalès certaines opérations pratiques, à l'établissement théorique desquelles la proposition en question est nécessaire : elle lui attribue, par exemple, la détermination de la distance de points inaccessibles, la mesure des hauteurs au moyen de l'ombre, et la relation qui nous est parvenue indiquerait que ces mesures furent exécutées à l'aide de triangles égaux. Or la détermination de l'inclinaison d'une arête pyramidale, entreprise par les Égyptiens, montre qu'ils savaient y employer des triangles semblables, et qu'ils étaient donc plus avancés que Thalès.

C'est pourtant à Thalès qu'appartient l'honneur d'avoir, pour la première fois chez les Grecs, entrepris des recherches mathématiques. A quel degré de culture mathématique le VIe siècle était-il, d'ailleurs, parvenu? Sur quelles données le siècle suivant put-il construire? La réponse à cette seconde question est la meilleure réponse pour la première. Si, par exemple, les pythagoriciens découvrirent les cinq polyèdres réguliers, cette découverte présume chez leurs devanciers des connaissances géométriques assez importantes.

Les renseignements qui s'offrent à nous sur la Mathématique des pythagoriciens sont beaucoup plus satisfaisants. Sans doute, non seulement on ne peut pas trop s'y fier en ce qui concerne la part à faire revenir au maître et aux disciples dans l'œuvre, car ils ont peut-être encore trop de tendance à attribuer aux pythagoriciens beaucoup de choses dont la découverte fut seulement de leur temps et, cependant, pour qui est initié aux Mathématiques grecques plus récentes, ils rendent une image d'ensemble si nette et si saisissable de ces Mathématiques à leur premier stade d'évolution, des efforts tentés dès l'origine et qui laissèrent ensuite leur trace dans les Mathématiques grecques, bien plus, dans toutes les Mathématiques postérieures, que ces renseigne-

ments méritent d'être rassemblés en un exposé : de la sorte nous connaîtrons le fondement des travaux exécutés à la fin du siècle en question, et nous en comprendrons mieux le but, tout en éclairant la physionomie qu'affectèrent notamment les Mathématiques au siècle suivant.

Selon Eudème, les pythagoriciens ont tout d'abord « élevé la Géométrie à la dignité réelle d'une Science, par ce que Pythagore en considéra le principe de plus haut et en scruta les théorèmes plus intellectuellement et immatériellement — pour ainsi dire — ; en outre, il découvrit les grandeurs irrationnelles et la construction des figures cosmiques (polyèdres réguliers) ». En fait de renseignements plus spéciaux dus à d'autres écrivains, outre quelques définitions plus philosophiques que mathématiques du point, de la ligne, de la surface et des corps solides, nous apprenons que les pythagoriciens connaissaient la somme des angles du triangle, la division du plan en polygones (vraisemblablement réguliers), savoir en triangles, carrés ou hexagones, dont respectivement 6, 4 ou 3 ont un sommet commun ; ils auraient inventé ce qu'on appelle l'*application des surfaces* — on entendait par là, nous le verrons, la résolution d'équations quadratiques sous une forme géométrique — ; ils auraient connu la construction d'un polygone de même aire qu'un polygone donné et simultanément semblable à un deuxième polygone ; il est raconté qu'un pythagoricien commit, contre son école, le délit de divulguer le « théorème de douze pentagones dans une sphère » ; on peut enfin mentionner le pentagramme qui est donné pour un symbole pythagorique : c'est un pentagone étoilé dont les côtés forment, dans le cercle circonscrit, les cordes d'arcs ayant pour grandeur $\frac{4\pi}{5}$.

Tandis que des cas particuliers du théorème, appelé encore aujourd'hui *de Pythagore*, ont été sûrement connus avant lui, ce théorème même, dans sa généralité, reste attribué aux pythagoriciens ; de même que l'une des règles d'après lesquelles on peut former des nombres rationnels pour les côtés d'un triangle rectangle, à savoir les nombres a, $\frac{a^2-1}{2}$ et $\frac{a^2+1}{2}$, où a représente un nombre impair, tandis

que les nombres a, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, où a est un nombre pair, sont attribués à Platon.

On nous apprend que les pythagoriciens connaissaient les trois sortes de proportions, arithmétique, géométrique et harmonique, de plus, les nombres triangulaires, c'est-à-dire les sommes des premiers nombres de la série numérale naturelle, et qu'ils s'occupaient aussi de progressions arithmétiques plus générales; enfin que Pythagore fait, du nombre, le principe de toutes choses, et que les pythagoriciens se sont livrés à des recherches sur certains nombres entiers, comme les *nombres amiables* — dont l'un est égal à la somme des parties aliquotes [1] des autres — ou les *nombres parfaits*. qui sont égaux à la somme de leurs propres parties aliquotes ($6 = 1 + 2 + 3$). Enfin Pythagore aurait établi des rapports entre la Géométrie et l'Arithmétique ou la Musique.

Nous parlerons plus en détail de plusieurs de ces sujets et de leur importance quant aux Mathématiques grecques mais, d'abord, il nous en faut montrer brièvement la connexité pour établir la concordance des données issues de sources de valeurs très diverses.

Commençons par noter l'effort pour préciser clairement les idées de *point*, *ligne*, etc.; puis, aussi, l'on était déjà en possession de l'idée d'*angle* pour l'appliquer, tant à la division du plan qu'à rechercher d'une manière générale quels sont les polyèdres réguliers et possibles. Sans doute il fallait bien du travail avant d'arriver à la parfaite détermination et à la construction que l'on trouve chez Euclide du dodécaèdre et de l'icosaèdre, mais le premier pas vers ce but, la construction du pentagone régulier, était fait, et l'on s'enorgueillit visiblement d'être allé si loin.

Dans la construction des côtés du pentagone, ou du décagone, nous avons déjà un exemple de solution géométrique d'une équation du second degré, solution deux fois répétée par Euclide, mais ce qui prouve que les pythagoriciens ne s'en tinrent pas à ce cas unique c'est, non seulement la

(1) On sait que les *parties aliquotes* d'un nombre sont tous ses diviseurs, à l'exclusion du nombre lui-même, mais en y comprenant l'unité. (T.)

mention générale de l'application des surfaces, mais encore la mention particulière du *théorème de Pythagore* si important, nous le verrons, pour ces investigations, ainsi que d'une construction *ad hoc* tout aussi importante. Ajoutons la découverte que les équations du second degré donnaient lieu à des grandeurs *incommensurables*, les équations numériques, à des grandeurs irrationnelles (par ces dernières nous entendons toujours des grandeurs incommensurables avec l'unité employée).

Il se peut aussi que les recherches pythagoriciennes sur la théorie des nombres n'aient été, partiellement, qu'une continuation de la numération mystique des Babyloniens; mais elles n'en aboutirent pas moins, en tous cas, à former par ailleurs des équations quadratiques où l'irrationalité fût évitée.

On ne peut éviter les grandeurs irrationnelles dans les recherches générales mais, par cela même, les procédés mathématiques usités jusque-là manquaient de sûreté, et c'est le grand mérite des pythagoriciens de s'en être aperçus. On connaissait bien les proportions et, vraisemblablement de bonne heure déjà, l'on s'en servait sous l'une ou l'autre forme; mais avant Eudoxe il ne pouvait être question que d'égalité de rapports entre nombres entiers, ou d'égalité de ces rapports avec des rapports entre grandeurs géométriques, qui devaient être par suite commensurables; on employait les opérations simples comme la multiplication; on savait, à l'instar des Égyptiens, que, par exemple, un rectangle est égal au produit des côtés, l'unité de surface étant le carré construit sur l'unité de longueur; d'ailleurs, si les côtés sont incommensurables, non seulement la démonstration par la division en carrés n'est plus applicable, mais même la proposition perd tout sens, car il est contraire à l'idée que l'on se fait d'un produit, dans le calcul ordinaire, que les facteurs de ce produit soient des nombres irrationnels.

C'est cette difficulté que supprimèrent les pythagoriciens et, à leur suite, les mathématiciens grecs *en représentant géométriquement la grandeur en général :* au premier abord, l'avantage de cette représentation peut, sans doute, paraître assez mince, étant donné qu'un segment quelconque a tout aussi bien une grandeur déterminée qu'un nombre pris arbi-

trairement, mais la figure tracée ne sert qu'à fixer pour l'imagination la figure conçue, et les grandeurs, dans celle-ci, peuvent prendre toutes les valeurs qui s'accordent avec la conception. Ainsi, au même titre qu'une lettre en Algèbre, la représentation d'une grandeur par la longueur d'un segment peut s'appliquer à des grandeurs variant d'une façon continue.

Sans doute les Grecs ne savaient rien des quantités négatives, pas plus que des quantités imaginaires : mais, à défaut des premières, les variations de la figure peuvent en partie présenter les mêmes généralisations que nous obtenons aujourd'hui au moyen des quantités négatives.

A ces remarques l'on peut reconnaître que les opérations sur les quantités représentées géométriquement jouent un rôle semblable à celui de nos opérations algébriques, de sorte que nous appellerons *Algèbre géométrique* la théorie de ces opérations, et nous l'exposerons ici telle que nous la font connaître le deuxième livre des *Éléments* d'Euclide d'une part, et, d'autre part, l'application qui en est faite partout, dans les Mathématiques grecques, principalement là où, maintenant, on emploie des équations du second degré. L'Algèbre géométrique, aussi bien chez Euclide que chez d'autres, est à la base de tant de recherches que cette fréquence même constitue une preuve de la haute antiquité que nous lui pouvons attribuer, d'accord avec ce qu'on nous rapporte de la notion pythagoricienne de l'application des surfaces, et sa facile application à telles grandeurs que l'on veut, tant irrationnelles que rationnelles et, conséquemment, sa nature abstraite, conviennent bien à ce que dit Eudème de la façon dont Pythagore traitait la Géométrie, immatériellement.

Il est toutefois bien possible que ce caractère abstrait n'ait pas été tout d'abord si notoire et si marqué qu'il l'était devenu au temps d'Eudème, et qu'il l'est dans Euclide. Au contraire, il est naturel — et tout à fait d'accord avec ce qu'on nous apprend sur la liaison, opérée par les pythagoriciens, de la Géométrie et de l'Arithmétique — d'admettre que la traduction géométrique correspondant aux nombres entiers qui, chez Euclide, apparaît comme une application de l'Algèbre géométrique, fut antérieure à cette Algèbre même.

Dans les représentations géométriques des propriétés des nombres entiers, par lesquelles on a commencé, on trouva par la suite une forme de représentation qui, d'elle-même, tout aussi facilement, s'appliquait généralement à des grandeurs continues, mais il est aussi probable que l'on ne s'en aperçut qu'à la longue : ce pourquoi nous commencerons par traiter de l'Arithmétique géométrique des Grecs, comme introduction à leur Algèbre géométrique.

3. — L'Arithmétique géométrique.

On trouve couramment dans nos livres d'enseignement une démonstration géométrique pour cette proposition : le produit de nombres entiers ne dépend pas de l'ordre des facteurs, et cette démonstration consiste à ranger les unités, ou les points qui les représentent, en forme de rectangle; chaque rangée horizontale contient les unités du multiplicande, le nombre des rangées est égal au multiplicateur, et la permutation des rangées horizontales avec les verticales démontre la permutabilité des facteurs. Si, au lieu d'unités, on se sert de petits carrés ayant 1 de côté, on aura du même coup démontré le théorème géométrique que « la surface d'un rectangle a pour expression le produit de ses côtés » : si l'on néglige, au contraire, de prendre une unité déterminée l'on obtient, pourvu que les côtés soient commensurables, cette proposition que « deux rectangles sont entre eux comme les produits de leurs côtés ».

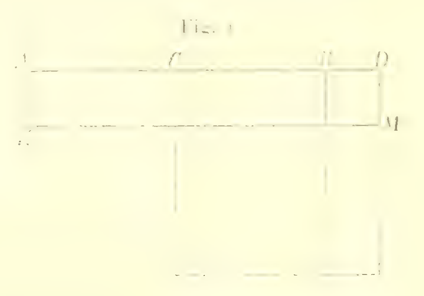
C'est de cette représentation que provient la dénomination, universellement usuelle chez les Grecs, de *nombres plans* pour ceux qui se composent de deux facteurs, c'est-à-dire qui forment une surface rectangulaire, et la dénomination encore maintenant employée de *nombre carré*. Les nombres plans sont dits *semblables* quand leurs facteurs sont proportionnels : ces nombres sont alors proportionnels à deux nombres carrés.

Au moyen du carré, qui figure un certain nombre carré (n^2), on obtient le nombre carré suivant $(n+1)^2$, en construisant le long des deux côtés $2n$ nouveaux petits carrés, puis un encore dans l'angle rentrant ainsi formé. Cette figure complémentaire s'appelle *gnomon*, comme en général toute figure qui

représente la différence entre deux figures perspectivement semblables, avec un point angulaire comme centre de similitude : dans le cas présent, elle est égale à $2n+1$. On trouve ainsi que les nombres carrés se forment comme les sommes des premiers nombres impairs, et si l'on fait de $2n+1$ lui-même un nombre carré l'on obtient précisément la détermination des côtés rationnels d'un triangle rectangle, ou la solution même de l'équation indéterminée $x^2+y^2=z^2$ en nombres entiers : cette solution a été attribuée (p. 27) à Pythagore, et celle que l'on rapporte à Platon s'obtient en donnant 2 de largeur au gnomon.

Si l'on veut donner au gnomon une largeur quelconque, on a la solution la plus générale de cette même équation en nombres entiers : pour cela, Euclide, dans le premier lemme à la proposition 28 du dixième Livre, emploie une transformation qui, dans notre langue algébrique actuelle, correspondrait à peu près à l'introduction des nouvelles inconnues $z+x=u$, $z-x=v$ (c'est-à-dire que la largeur du gnomon est v); uv doit alors être égal à un carré y^2. Euclide, dans ce cas, peut s'appuyer sur l'Algèbre géométrique qu'il a développée dans son deuxième Livre, et pour le serrer de plus près nous énoncerons dès maintenant la sixième proposition de ce Livre, proposition que nous rencontrerons bientôt de nouveau sous la forme suivante (*voir* p. 39) : C étant le milieu

Fig. 1.



de AB, et D un point du prolongement de AB,

$$AD \cdot BD = CD^2 - CB^2,$$

c'est-à-dire, avec les signes employés plus haut :

$$uv = z^2 - x^2.$$

Si toutes les lignes représentent des nombres entiers, il faut alors que AD ($= u$) et BD ($= v$) soient toutes deux des nombres pairs ou toutes deux des nombres impairs pour que AB $= 2$CB (ou $u - v = 2x$) puisse être pair; la condition nécessaire et suffisante pour que le gnomon AD.BD soit un nombre carré est, d'autre part, que AD et BD représentent des nombres semblables ou, dans notre langage, que AD $= am^2$, BD $= an^2$; alors

$$z = \mathrm{CD} = a\frac{m^2 + n^2}{2}, \qquad x = \mathrm{CB} = a\frac{m^2 - n^2}{2}, \qquad y = a.mn;$$

Nous verrons que cette représentation des nombres par des rectangles et des carrés donna naissance au principe de l'Algèbre géométrique, tandis que l'Arithmétique géométrique employa d'autres figures encore.

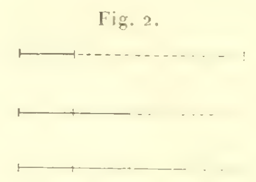
Nous avons dit que la notion des nombres triangulaires fut attribuée aux pythagoriciens : on entend, par là, les sommes des premiers nombres de la série numérale naturelle, et l'on place les unités de chaque nombre en rangées de points, les unes sous les autres, de manière qu'elles forment un triangle.

On voit alors facilement comment cette représentation put servir à un véritable calcul, car, en effet, il suffisait de construire, à côté du premier, un second triangle formé de points, de telle façon qu'ils formassent à eux deux un parallélogramme : comme il y a un nombre égal de points dans chaque rangée ($n + 1$ si n désigne le nombre des rangées), le total des points du parallélogramme, c'est-à-dire le double du nombre triangulaire, est $n(n+1)$ et c'est bien là, on le voit, un procédé identique à celui que l'on emploie en Algèbre lorsque l'on ajoute à elle-même, mais dans l'ordre inverse, la progression arithmétique.

Comme l'unité, qui dans cette série est la différence, peut être choisie à volonté, et comme une constante *additive* ne donne dans chaque terme qu'un produit qui doit être ajouté à la somme, on put alors facilement faire la somme d'une progression arithmétique quelconque; au reste, on peut aussi figurer la différence, comme dans la *fig.* 2, par un segment désignant immédiatement une quantité arbitraire. Archimède entreprit, dans son *Traité des spirales,* une investigation plus

large des progressions arithmétiques d'où il résulte bien que la sommation fut exécutée par la méthode que nous venons d'indiquer.

Fig. 2.



Mais revenons à la représentation des unités par des points pour citer encore un moyen, connu de Nicomaque, de représenter géométriquement des progressions arithmétiques ayant 1 pour premier terme et, pour raison, un nombre entier quelconque ($n-2$), moyen qui consiste dans l'emploi des nombres dits *polygonaux* (nombres n-gonaux). On figure le second terme ($n-1$) par des points qui forment, avec un point fixe, un polygone d'ordre n; le point fixe étant le centre de similitude, on passe de ce polygone à une série de polygones semblables d'ordre n au moyen d'une série de gnomons, dont chacun représente un terme de la progression : pour $n=4$, en particulier, on obtient les nombres quadrangulaires ou, étant donné que la forme du quadrilatère importe peu, les nombres carrés, ainsi qu'on l'a déjà vu.

On a même étendu à l'espace cette Arithmétique géométrique : les *nombres solides* sont des nombres qu'on figure par un parallélépipède, c'est-à-dire des produits de *trois* facteurs — si ces facteurs sont égaux, on obtient des nombres cubiques; les facteurs de deux nombres solides semblables sont proportionnels et, par suite, leur rapport est égal au rapport entre deux nombres cubiques. Un *nombre pyramidal* est la somme d'une série de nombres polygonaux d'ordre n, avec 1 pour premier terme, en imaginant les polygones superposés de manière à former une pyramide.

4. — Algèbre géométrique.

Une grandeur très générale, rationnelle ou irrationnelle, peut être figurée d'abord par la longueur d'un segment recti-

ligne et la soustraction ou l'addition des grandeurs ainsi représentées se fera en rapportant l'un des segments sur l'autre, ou sur son prolongement : nous venons d'avoir un exemple de ce procédé dans la sommation des progressions arithmétiques chez Archimède, et il est surtout applicable à la représentation d'équations du premier degré à coefficients entiers ou seulement rationnels, ces derniers étant réductibles en nombres entiers.

La multiplication, au sens immédiat du mot, des grandeurs générales, est un non-sens, mais on s'en tira en appliquant aux grandeurs générales la représentation géométrique, que nous connaissons déjà, d'un produit de deux nombres entiers. Toutefois, on n'élargissait point, comme dans les Mathématiques modernes, les concepts arithmétiques de multiplication et de produit : au lieu de parler d'*un produit de grandeurs générales*, on parlait d'un rectangle formé par les deux segments figurant les facteurs, et l'on opérait au moyen de ce rectangle. Cependant, étant donné que l'on représente de la même manière de véritables produits de nombres entiers, on pouvait toujours se faire guider par le traitement arithmétique usité dans ce dernier cas, et je pourrai donc, sans crainte d'induire en erreur, désigner dans ce qui va suivre par ab le rectangle formé par a et b, et par a^2 le carré de a.

On obtenait, de la sorte, une deuxième représentation géométrique des grandeurs, à savoir, comme surfaces, tout d'abord des rectangles et carrés; pour les additionner ou les soustraire, on devait leur donner un côté commun mais, cela, sans employer la théorie des proportions, car celle qu'on en possédait au ve siècle reposait sur l'usage exclusif de quantités commensurables. On introduisait donc un côté nouveau, dans un rectangle, à l'aide de la proposition suivante : les parallèles aux côtés d'un rectangle, qui se coupent sur une diagonale, divisent ce rectangle en quatre autres dont deux sont égaux, à savoir ceux que ne traverse pas la diagonale considérée (*cf.*, p. 37-39 les *fig.* 3-5, où, pour le cas présent, l'on doit s'imaginer les carrés comme remplacés par des rectangles); si l'un de ces rectangles est le rectangle proposé, il est alors facile de donner à l'autre un côté donné.

Cette construction, qui répond à la division tout comme celle d'un rectangle de côtés donnés répond à la multiplication, porte le nom d'*application des surfaces* (παραβολή), ou de παραβολή simple par opposition à la παραβολή elliptique et hyperbolique dont nous parlerons plus loin, et nous verrons que la figure que l'on y emploie présente encore d'autres applications importantes : la partie qui comprend les deux rectangles égaux et l'un des deux autres s'appelle, ici comme en Arithmétique géométrique, *gnomon* — c'est, par exemple, CBEM dans la *fig.* 4.

Le théorème en question se trouve employé de cette manière dans Euclide, I, 43-44, mais il y est sous une forme un peu plus générale : les rectangles y sont remplacés par des parallélogrammes à angles égaux. Au contraire, au Livre II, le même Euclide opère au moyen de rectangles; et c'est dans son Livre VI qu'il nous faut chercher des éclaircissements sur l'emploi qu'on dut faire des théorèmes de ce Livre II, longtemps avant lui, puisque, nous dit-on, les pythagoriciens avaient connu l'application des surfaces. Dans ce Livre VI, toutefois, les applications desdit théorèmes sont présentées sous une forme généralisée qui est bien de l'invention d'Euclide, ou de ses prédécesseurs immédiats [1].

Un rectangle, dont les côtés sont eux-mêmes des sommes, est la somme de tous les rectangles ayant pour côtés un terme de chacune des sommes données.

Au lieu de la formule moderne

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Euclide (II, 4) donnait la *fig.* 3 suivante.

Le problème que nous poserions maintenant par l'équation

$$(1) \qquad ax - x^2 = b^2$$

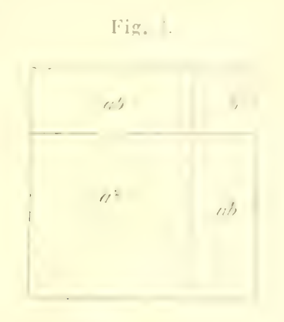
était exprimé par les anciens de la façon suivante (*fig.* 74) :

Construire, sur un segment donné AB ($= a$), un rectangle

[1] Le but de cette généralisation est expliqué dans notre § 16.

AM égal à un carré donné (b^2), de telle sorte que la portion de surface manquant — au rectangle ax sur AB — soit un carré (BM = x^2).

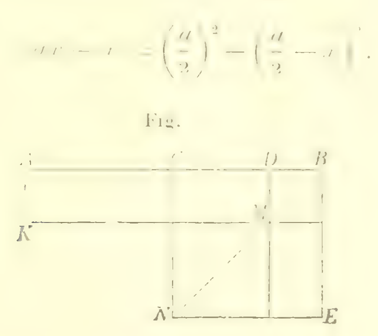
Fig. 1.



On obtient cette construction, qui s'appelle *application elliptique des surfaces* — de ἔλλειψις, action de faire défaut —, en ramenant à la figure précédente celle par laquelle on résout le problème : si C, en effet, est le milieu de AB et qu'on applique le rectangle CK au côté DB (il prend la position DE), on voit que le rectangle AM est égal à un gnomon, c'est-à-dire égal à la différence des carrés élevés sur BC et CD ou, en notre langage algébrique, que

$$ax - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Fig.



Maintenant, étant connus b et CB = $\frac{a}{2}$, on peut, au moyen du théorème de Pythagore, trouver CD = $\frac{a}{2} - x$ et, de la sorte, x.

On peut conclure d'Euclide (VI, 28) que telle est à peu près

la manière dont fut résolu ce problème, encore que cette proposition le présente sous une forme plus générale, mais la transformation employée ici se trouve déjà dans Euclide, II, 5, où il est dit que, C étant le milieu et D un autre point de AB,

$$AD.DB + CD^2 = CB^2.$$

Ce théorème donne directement la solution du même problème, exprimé cependant sous la forme que voici : *partager un segment donné* AB *en deux autres qui forment un rectangle de surface donnée* (cette surface, il nous faut provisoirement, pour pouvoir appliquer le théorème de Pythagore, l'imaginer donnée sous la forme d'un carré b^2). Les *Data* d'Euclide (§ 85) nous montrent que les anciens ont également connu le problème sous cette forme, qui est l'énoncé géométrique du problème suivant : déterminer deux quantités dont on connaît la somme et le produit.

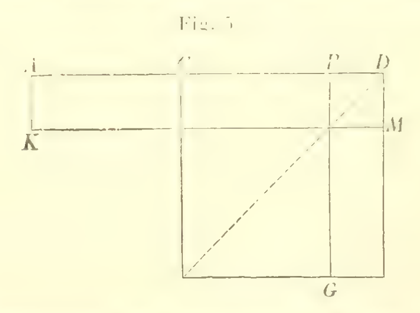
La première représentation du problème que nous avons mentionnée, sous forme d'une application *elliptique* de surface, entraînait cet inconvénient que les anciens donnaient ordinairement une seule des solutions de l'équation (1) (*voir* p. 36), inconvénient qui disparaît de lui-même dans la seconde manière.

Euclide donne (II, 6), absolument de la même façon, une solution (qu'implique la proposition VI, 29) de l'équation

$$(2) \qquad ax + x^2 = b^2,$$

équation que les anciens expriment : sur un segment donné

Fig. 5.



AB (= a), construire un rectangle AM égal à un carré donné (b^2), de telle sorte que la portion de surface BM excé-

dante soit un carré (b^2). Cette construction s'appelle l'*application de surface hyperbolique* — de ὑπερβολή = surplus; le problème étant résolu et C désignant le milieu de AB, le rectangle AM se change en un gnomon si l'on porte le rectangle élevé sur AC dans la position GM. On trouve alors, D étant un point du prolongement de AB, que

$$AD.BD = CD^2 - CB^2;$$

et cette transformation géométrique concorde précisément avec la transformation algébrique par laquelle nous résolvons actuellement l'équation (2), savoir :

$$b^2 = ax + x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

on détermine CD $\left(= \frac{a}{2} + x\right)$ à l'aide du théorème de Pythagore.

Le théorème d'Euclide (II, 6) comporte immédiatement la solution du même problème sous une autre forme que voici : déterminer deux segments (AD et BD) dont on donne la différence et le rectangle (égal au carré b^2), problème qui n'est à son tour que la forme géométrique du suivant : déterminer deux quantités, connaissant leur différence et leur produit, et comme le problème se trouve également sous cette seconde forme chez les anciens (*Data* d'Euclide, 84), il importe fort peu que l'on ne rencontre aucune forme pour rendre l'équation

$$(3) \qquad x^2 - ax = b^2$$

d'une manière aussi directe que celle par laquelle les applications de surface rendent les équations (1) et (2).

Pour obtenir, dans notre langage algébrique, l'équation (2) ou l'équation (3), nous n'avons, en effet, qu'à transcrire Euclide (II, 6) à la manière moderne, en posant

$$BD = x \qquad \text{ou} \qquad AD = x.$$

Nous voyons donc que les anciens ont traité toutes les formes de l'équation du second degré qui donnent des racines positives car, pour les autres, il n'en pouvait être question

vu qu'ils n'avaient aucune idée des quantités négatives. Pour la solution géométrique que nous donnons ici, nous avons supposé que le terme connu, qui devait toujours être une surface pour l'homogénéité, était donné sous la forme d'un carré : alors la solution a été obtenue au moyen du théorème dit *de Pythagore*. Ce théorème, dont les Égyptiens déjà connaissaient au moins des cas particuliers, fut attribué à Pythagore sans que, toutefois, on sache rien sur la façon dont il l'aurait démontré, mais il se peut que cette démonstration ait été faite à l'aide de triangles semblables : elle ne pouvait donc être exacte, avec la théorie alors connue des proportions, que si les côtés étaient commensurables, car on ne faisait que commencer à ce moment-là d'introduire les constructions géométriques universellement applicables, et c'est bien Euclide, comme il nous est expressément rapporté, qui doit être l'auteur original de la démonstration générale, au Livre I, 47, de son œuvre.

Euclide démontrant que le carré élevé sur un côté est égal au rectangle (c'est-à-dire au produit) de la projection de ce côté sur l'hypoténuse par l'hypoténuse entière, il est assez vraisemblable que, dans l'ancienne démonstration qu'il voulait remplacer, on se soit servi des théorèmes qui y correspondent sur les moyennes proportionnelles.

La démonstration, du reste, pouvait être également faite au moyen des opérations qui servirent à la solution des équations; il ressort nettement de la *fig.* 3 que

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$

différence qui est égale au carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés a et b : on le voit en construisant, aux quatre angles du carré $(a + b)^2$, des triangles de cette nature et tels qu'il reste un carré au milieu. Il nous faut peut-être voir un signe de l'usage général de cette démonstration dans ce fait que Socrate (le Dialogue Ménon, de Platon) procède précisément ainsi pour persuader l'esclave de Ménon de la justesse du théorème dans le cas spécial où $a = b$; mais, par rapport à une démonstration aussi simple, celle d'Euclide ne serait plus du tout un progrès. La variante que constitue cette explication possible nous prouve bien que nous n'avons,

sur les méthodes de démonstration primitives, aucun renseignement solide pour guider nos recherches.

En ce qui concerne la transformation d'une figure en un carré, transformation dont on dut se servir, soit pour donner aux équations la forme admise ici, soit pour construire sans recourir au théorème de Pythagore la grandeur représentée dans la solution moderne par une racine carrée, on attribue expressément aux pythagoriciens la connaissance du problème :

Construire une figure qui soit égale à une figure donnée et semblable à une deuxième.

En tous cas, il ne peut avoir été question là que de figures rectilignes et, dans le cas spécial dont nous nous occupons, la deuxième figure est un carré, la forme plus générale du problème étant celle qui se trouve dans Euclide, VI, 25, où cet auteur doit l'avoir employée à ses applications de surface généralisées. Celui qui, postérieurement, attribua aux pythagoriciens la notion du problème ainsi conçu voulait donner à entendre par là que ces pythagoriciens avaient été en possession des données que suppose et qu'exige l'application des surfaces; mais l'application simple des surfaces n'exige, elle, que la transformation de la figure en un carré.

La transformation d'une figure rectiligne en un rectangle n'est pas embarrassante; en outre, Euclide nous montre comment on pouvait transformer un rectangle en un carré sans recourir aux moyennes proportionnelles et sans s'appuyer sur la théorie des proportions, incomplète avant Eudoxe : pour cela, dans son Livre II, 14, il ne s'appuie que sur l'Algèbre géométrique, car la construction repose, en effet, sur le théorème II, 5 (ou 6), précédemment mentionné, d'après lequel on représente un rectangle comme la différence de deux carrés. Le côté du carré, égal au rectangle, se construit ensuite à l'aide du théorème de Pythagore.

Cette transformation correspond à l'équation

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

et contient la solution de l'*équation quadratique pure*.

On attribue aux pythagoriciens un emploi géométrique déterminé de l'application de surfaces : la construction du côté du pentagone (ou décagone) régulier. Cette construction dépend, on le sait, de l'équation

$$x^2 = a(a - x),$$

qui se transforme en

$$a^2 = x^2 - ax;$$

et l'on résout cette équation par application hyperbolique de surfaces. Pour résoudre ce problème, Euclide (II, 11) se sert exactement de la même transformation d'équation sous forme géométrique.

Les théorèmes II, 5 et 6, ne servent pas exclusivement à résoudre les équations du second degré ; ainsi nous avons déjà mentionné (p. 32) une application arithmétique qu'en fait Euclide dans son dixième Livre, et nous venons de dire comment, avec eux, on évite de recourir aux moyennes proportionnelles. Une autre preuve de ce fait que l'Algèbre géométrique dispense d'employer les proportions se rencontre chez Euclide (III, 35-37), dans les démonstrations des théorèmes sur la puissance d'un point par rapport à un cercle ; les théorèmes II, 5 et 6, affirmaient (*cf.* les figures, p. 37 et 38) qu'étant donnés C, milieu de AB, et D, un point de AB ou de son prolongement,

$$AD.DB = (CB^2 - CD^2);$$

si, maintenant, A et B sont les points d'intersection d'un cercle dont le centre est O, on obtient par le théorème de Pythagore

$$CB^2 - CD^2 = OB^2 - OD^2,$$

et les théorèmes sur la puissance sont démontrés.

Toutefois, les éléments d'Algèbre géométrique exposés ici embrassent notamment le traitement des équations du second degré, c'est-à-dire précisément le terrain sur lequel s'était fait sentir la nécessité d'une représentation autre qu'une représentation numérique, à cause de l'intervention des quantités irrationnelles : pour traiter ces équations on pou-

vait, il est vrai, se contenter de l'emploi de rectangles et de carrés, tant qu'on n'avait pas déjà de grandeur donnée qui fût représentée par la surface de quelque autre figure, mais, quand l'Algèbre géométrique et son application se furent développées davantage, en particulier par la théorie des sections coniques, on l'élargit jusqu'à se servir d'autres figures (que le rectangle et le carré) pour représenter les quantités avec lesquelles on opérait.

Il est clair, cependant, que l'Algèbre géométrique, en son application aux rectangles — et même aux parallélogrammes, vu qu'on n'y introduit jamais d'unités déterminées et qu'ainsi l'on y opère toujours par équations homogènes, — que cette Algèbre, disons-nous, implique l'Arithmétique géométrique : car alors seulement il est possible de changer les points représentant des unités en Arithmétique avec des carrés ou des parallélogrammes égaux; les nombres triangulaires, au contraire, n'ont rien à voir avec la surface du triangle, confusion qui devait amener plus tard les arpenteurs romains à se servir de la formule $\frac{a(a+1)}{2}$ pour calculer la surface d'un triangle équilatéral de côté a.

5. — Équations quadratiques numériques; extraction de la racine carrée.

De la concordance entre l'Algèbre et l'Arithmétique géométrique appliquées aux rectangles il résulte qu'il était désormais facile de transporter, aux équations numériquement données, la solution générale trouvée pour les équations quadratiques. Ici, toutefois, surgissait un inconvénient : les racines étaient en général irrationnelles.

On chercha évidemment des types où l'inconvénient fût éludé, ce qui se voit aux efforts tentés pour résoudre des équations indéterminées telles que $x^2 + y^2 = z^2$, mais, dans les problèmes géométriques ou autres applications, il fallait bien prendre les grandeurs telles qu'elles étaient et, quand on ne pouvait trouver une solution rationnelle, c'est-à-dire exactement exprimable en nombres, il y avait alors deux choses à faire : 1° prouver que les quantités cherchées n'étaient réelle-

ment point rationnelles et, passant à des équations où les grandeurs données étaient déjà irrationnelles, classer les différentes quantités irrationnelles qui se pouvaient présenter; 2° pour les applications, calculer les quantités irrationnelles avec la plus grande approximation possible.

C'est dans la première direction que les anciens Grecs abondèrent le plus : nous avons déjà cité un exemple d'investigation de ce genre dans la solution par Euclide de l'équation $x^2+y^2=z^2$, et comme il la résolvait complètement, il trouva les conditions non seulement suffisantes, mais aussi nécessaires, pour que $\sqrt{x^2+y^2}$ et $\sqrt{x^2-y^2}$ fussent rationnelles; il trouva donc que, ces conditions n'étant pas remplies, les racines en question sont irrationnelles.

Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, vraisemblablement très vieille et qui, dans quelques éditions, prit place, à tort, à la fin du dixième Livre d'Euclide, est cependant beaucoup moins compliquée et, représentation géométrique à part, peut s'exprimer à peu près de la façon suivante : si l'on a $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ (fraction simplifiée le plus possible), on aura $m^2=2n^2$, d'où résulte que m^2 est un nombre pair et que m l'est également; $\frac{m}{n}$ n'étant pas simplifiable, n serait alors impair. Mais si m est pair, il s'ensuit que m^2 sera divisible par 4; donc n^2 le sera par 2; donc n sera pair, or n ne pouvant être à la fois pair et impair, il est bien impossible que $\sqrt{2}$ soit une fraction irréductible.

Pareil procédé s'emploie, on le sait, d'une manière générale, pour prouver que la racine d'un nombre entier ne peut être une fraction.

Plusieurs des théorèmes du huitième Livre d'Euclide ont été probablement développés d'abord à cette fin : c'est le cas, par exemple, de la sixième proposition qui dit, quoique sous une autre forme, que la puissance d'une fraction irréductible doit être, elle-même, une fraction irréductible. Telle est, en tous cas, la démonstration générale dont on se servit plus tard, comme on le voit dans le commentaire d'Eutocius sur Archimède.

Cependant, Euclide donne encore, dans son dixième Livre,

un moyen général pour vérifier la rationalité d'une grandeur, ou, ce qui revient au même, la commensurabilité de deux grandeurs, et ce moyen consiste à employer la même opération que pour déterminer la plus grande commune mesure entre les deux grandeurs : les grandeurs étant figurées par des segments, on porte le plus petit, b, sur le plus grand, jusqu'à ce que le reste c soit plus petit que b, puis on porte de même c sur b, etc.; si cette opération se poursuit à l'infini, les grandeurs sont incommensurables. De cette façon on trouve facilement qu'un segment partagé en moyenne et extrême raison se résout en segmentations, incommensurables entre elles et avec le segment tout entier. Le segment s'appelant a et ses segmentations x et y, on a, en effet,

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{x-y},$$

et l'opération qui doit aboutir à la plus grande commune mesure consiste donc en segmentation de segmentations, tant que manifestement il soit impossible d'en venir à bout.

De cette façon on peut démontrer que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et, par conséquent aussi $\sqrt{5}$, sont irrationnels. Il est d'ailleurs probable que Théétète, s'est servi d'un procédé analogue dans une suite de démonstrations particulières de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$.

Maintenant, comme les racines d'équations du second degré, au cas où elles sont incommensurables avec les quantités données, ne peuvent s'exprimer exactement par ces quantités, on comprend que les Grecs n'aient introduit aucune valeur approximative dans leurs investigations exactes, mais qu'ils aient seulement poursuivi l'opération avec les quantités trouvées, représentées par les segments qui résultaient de la construction correspondant à la solution de l'équation : c'est au fond ce que nous faisons quand, au lieu de calculer les racines, nous nous contentons de les exprimer par des signes de racine carrée, ou autres symboles algébriques, mais toutefois, un segment ayant tout l'aspect d'un autre segment, on ne pouvait arriver avec cette méthode à la clarté de notre

langage algébrique, et il fallut entreprendre une classification des quantités irrationnelles, fournies par solutions successives d'équations du second degré.

C'est ce que tenta, du temps de Platon, Théétète, dont le travail fut continué par Euclide et compris dans le dixième Livre des *Éléments :* nous y reviendrons à propos de ce Livre et il nous suffit ici de remarquer que ce Travail devait contenir aussi un examen des cas où une quantité, qui appartient en apparence à une classe, se ramène en réalité à une autre ; en d'autres termes, traiter de la simplification de l'irrationalité double.

Nous rencontrons les applications de cette classification dans les cas où l'on veut déterminer exactement des grandeurs qui dépendent de racines carrées, et c'est le cas pour les côtés des polygones réguliers les plus simples comme pour les arêtes des polyèdres réguliers : Théétète s'est particulièrement occupé de cette dernière application qui joue un rôle capital dans les *Éléments* d'Euclide.

Cependant, cet Ouvrage omet tout calcul approximatif de nombres, et l'explication en est peut-être qu'un pareil calcul abandonne la détermination absolument exacte à laquelle on visait en Géométrie, mais, d'un autre côté, le fait pourrait bien aussi tenir à ce que les Grecs étaient inhabiles à exécuter les calculs véritables; cette indigence paraît déjà lorsque, par exemple, Hérodote ne peut faire une division juste par 48, et elle est encore plus frappante s'il s'agit de sortir des quatre règles simples pour calculer, j'imagine, la racine carrée.

Tenons-nous-en donc provisoirement à leurs moyens ordinaires : il est vrai que la numération grecque écrite (dont nous aurons plus tard l'occasion de parler davantage), si l'on s'y exerçait comme nous le faisons pour la nôtre, dès l'enfance, pourrait bien être beaucoup plus pratique qu'on ne se l'imagine tout d'abord. On recourait bien aussi, dans les calculs, à des moyens mécaniques comme les tablettes à calculer munies de divisions, mais, quand il s'agissait de représenter de grands nombres, la numération grecque ne suffisait plus : on le voit à ce fait que, à l'époque même où les Mathématiques étaient à leur apogée, des hommes comme Archimède et Apollonius, dans les écrits desquels un savant mathématicien

d'aujourd'hui pourrait encore trouver des théorèmes et des démonstrations qu'il ignore, durent se construire des systèmes spéciaux afin de désigner les nombres de grandeur illimitée; c'est ce que fait précisément Archimède dans son écrit sur le calcul du sable, où il veut donner une idée de l'infinité de la série numérique et suppute combien de grains de sable il peut y avoir dans le monde, si l'on attribue certaines grandeurs à ce monde comme aux grains de sable.

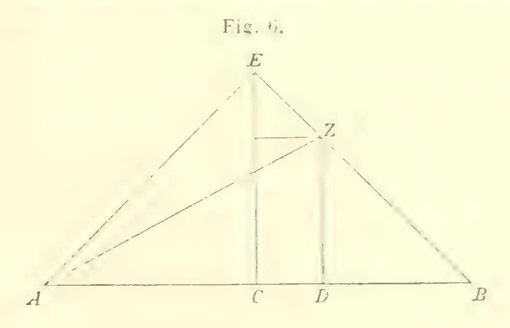
Enfin, ce qui ne plaide encore nullement en faveur des moyens de calcul numérique particuliers au commun des Grecs, c'est que les astronomes ne les estimèrent point suffisants et adoptèrent, avec l'Astronomie des Babyloniens, leur système sexagésimal pour les calculs astronomiques.

Pour le calcul de la racine carrée chez les Grecs, mentionnons d'abord une détermination particulière de $\sqrt{2}$: on ne la tient immédiatement que d'un arithméticien relativement récent, mais il faut faire remonter cette détermination à une époque bien antérieure, car on la trouve établie dans Euclide, II, 9 (et 10). En outre, la façon dont elle y est établie constitue un type d'application de l'Algèbre géométrique : C étant le milieu, et D un autre point du segment AB, le théorème 9 dit que

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2,$$

théorème que l'on eût pu démontrer par des transformations de rectangles; mais Euclide le démontre à l'aide du théorème

Fig. 6.



de Pythagore appliqué aux triangles rectangles isoscèles, démonstration qui tient sans doute précisément à ce que $\sqrt{2}$ est

représentée comme l'hypoténuse AB d'un pareil triangle AEB. Z étant alors le point où la perpendiculaire à AB en D coupe le côté EB, on a

$$DB = DZ,$$

et

$$AD^2 + DZ^2 = AE^2 + EZ^2 = 2AC^2 + 2CD^2.$$

Pour rendre plus claire l'application de l'équation trouvée, posons

$$CD = x, \qquad BD = y,$$

d'où

$$AD = 2x + y, \qquad AC = x + y,$$

et, en désignant les deux dernières quantités par y_1 et x_1, on a

$$2x_1^2 - y_1^2 = -(2x^2 - y^2).$$

L'équation trouvée sert à tirer, d'une solution en nombres entiers de l'une des deux équations indéterminées

$$2x^2 - y^2 = \pm 1,$$

une solution de l'autre équation en nombres supérieurs $x_1 = x + y$ et $y_1 = 2x + y$, et, si l'on continue ainsi, les valeurs $\frac{y}{x}$, $\frac{y_1}{x_1}$, etc., qui, tour à tour, sont trop petites ou trop grandes, se rapprochent toujours davantage de $\sqrt{2}$; on peut partir, si l'on veut, de $x = y = 1$.

Au reste, les pythagoriciens connaissaient déjà la valeur approximative $\frac{7}{5}$.

Il se peut, dans des cas spéciaux, qu'on ait entrepris ainsi l'extraction de la racine carrée; tel devait être le cas qui se rattache aux démonstrations, déjà mentionnées en passant, de l'irrationalité de racines carrées spéciales (p. 45) et, d'ailleurs, la méthode donnée par Euclide pour vérifier l'irrationalité implique une telle extraction de racine, tout en ressemblant à l'emploi actuel des fractions continues et de leurs convergentes. Cette similitude se remarque déjà dans le calcul que nous avons exposé de $\sqrt{2}$; il se peut, du reste, que pour d'autres extractions spéciales de racines, comme

dans ce calcul, on se soit servi également d'équations indéterminées du second degré qui, avec les équations indéterminées (comme $x^2 + y^2 = z^2$) à l'aide desquelles on constituait des exemples numériques où fût évitée l'extraction de la racine carrée, contribuèrent à développer chez les Grecs l'habitude de manier certaines équations indéterminées du second degré, habitude dont témoignent les écrits de Diophante à une époque bien postérieure.

Mais, précisément, le fait que l'on ait recouru à des méthodes spéciales de ce genre prouve assez qu'on ne fut nullement habile, en général, pour extraire les racines carrées : on disposait pourtant du même moyen général qu'à présent, à savoir les expressions de $(a \pm b)^2$, dont la forme géométrique était presque aussi pratique que notre forme algébrique moderne, et il se peut, notamment, qu'Archimède ait employé ces expressions pour obtenir les racines qui, malheureusement sans aucune indication de méthode, se trouvent dans sa *Mesure du cercle*.

Les entiers des racines carrées de quelques nombres entiers à sept chiffres — dans notre numération écrite — auraient alors été calculés à peu près au moyen des mêmes opérations que maintenant puisque, pour corriger les valeurs approchées obtenues déjà (a), on disposait des inégalités

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

De même, Archimède établissant les limites

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

a pu, par la méthode indiquée, tirer ces inégalités de l'approximation $\frac{26}{15}$ ou, plus justement, de la valeur 26, approximative de $15\sqrt{3}$ $(= \sqrt{26^2 - 1})$. C'est ce qu'on voit en faisant $a = 26$, $b = 1$ dans les inégalités ci-dessus ; $\frac{26}{15}$ se tire de la même manière de l'approximation plus simple $\frac{5}{3}$.

Une preuve qu'il n'existait point de méthodes générales

ment connues pour extraire des racines carrées quelconques, c'est qu'un Archimède, seul, put arriver à déterminer π comme compris entre les limites $3\frac{1}{7}$ et $3\frac{10}{71}$, détermination irréalisable avant lui. Ce qui suit nous montrera, il est vrai, qu'on était en mesure, avant lui, de venir à bout sans grand'peine des difficultés géométriques, mais qu'on avait reculé devant le calcul numérique et l'extraction, qu'il comporte, des racines carrées, calcul inévitable si l'on voulait faire un emploi pratique de ces racines : aussi est-il naturel de trouver la plupart de ces calculs chez Héron qui, lui, se proposait des applications pratiques, et l'on vient même de découvrir la méthode qu'il possédait pour les exécuter, méthode qui ne diffère guère de celle que nous avons attribuée à Archimède. Néanmoins le degré d'exactitude, dans ses déterminations, n'est pas très grand en comparaison de ce qu'atteignait la théorie générale établie depuis plusieurs siècles déjà.

Ses extractions de racines carrées se rattachent, d'ailleurs, à une autre circonstance : c'est chez lui qu'on trouve, pour la première fois, des exemples du traitement d'équations numériques du second degré; ainsi nous voyons que, le terme x^2 ayant un coefficient numérique a, il changeait ce terme en a^2x^2 en multipliant l'équation par a et considérait, après cela, ax comme inconnue. Sans doute, Euclide avait également, nous le verrons, traité de telles équations et, cela, d'une manière générale, applicable encore même si le coefficient a est irrationnel, mais, précisément à cause de sa généralité, cette forme de traitement ne montre pas clairement comment on s'y prenait dans le calcul pratique.

Nous voici parvenus jusqu'au temps d'Héron et nous n'avons encore rien dit des calculs exécutés avant lui pour dresser les Tables de cordes d'arc des auteurs astronomiques, Tables établies d'après le système sexagésimal emprunté, entre temps, aux Chaldéens. Héron n'en fait aucun usage; on peut donc admettre que sa méthode est, en substance, la méthode d'origine grecque, mais plus développée de son temps qu'elle ne l'était à l'époque qui nous occupe pour l'instant.

En revanche, les racines carrées qu'on trouve dans Ptolémée sont calculées en unités sexagésimales à peu près de la même manière que nous calculons aujourd'hui des racines en

fractions décimales, et il a été dit précédemment que, de bonne heure déjà, les Grecs connaissaient le fondement théorique de ce calcul d'après la formule pour $(a+b)^2$; ils en purent donc naturellement venir, l'Astronomie exigeant de plus en plus la précision numérique, à exécuter réellement ces calculs. Cependant il se pourrait que les vieilles Tables de nombres sexagésimaux carrés ou cubiques, déjà mentionnées page 10, fussent un indice que l'on connaissait d'antique date, en Babylonie, l'extraction des racines et que, sous ce rapport encore, les Grecs apprirent déjà quelque chose des peuples d'Orient lors que le système sexagésimal fut introduit chez eux.

Ce ne sera guère nous tromper que de voir dans la découverte et le traitement ultérieur des grandeurs irrationnelles la source de ce qui fit, et la force principale, et la principale faiblesse des Mathématiques grecques.

D'un côté l'on chercha, d'un effort continu, à rendre toute démonstration applicable, même à ces grandeurs qui ne se peuvent qu'approximativement exprimer par des nombres et pour lesquelles, en conséquence, toute démonstration numérique serait insuffisante : ainsi se développèrent les scrupuleuses tendances des Grecs à l'impeccabilité de leurs déductions et à la précision de l'expression, qualités grâce auxquelles les Mathématiques sont devenues la *Science exacte* par excellence, et les mots *certitude mathématique* synonymes d'absolue certitude. Les Grecs ont jeté, de la sorte, le fondement nécessaire au sublime édifice d'Archimède et d'Apollonius, et c'est à ce fondement même que dut revenir comme à son point d'appui la Mathématique moderne quand il lui fallut, après si longtemps, reprendre à nouveau la même puissance scientifique; bien plus, même de nos jours, elle a recours aux principes logiques développés et tenus en haute estime par les Grecs, soit pour s'assurer, dans la voie arithmétique où elle est engagée, la même certitude que les Grecs assuraient à leurs formes géométriques, soit pour rendre inattaquable le calcul infinitésimal.

D'autre part, une œuvre aussi grandiose n'aurait point dû entraîner l'indifférence pour les essais tendant à calculer approximativement ce qui ne comporte pas de pleine et entière

exactitude : Archimède ne montra-t-il point que l'on pouvait exprimer d'une manière irréprochable les résultats même d'un pareil calcul? C'est ce qu'il fait, précisément, en indiquant les *limites* entre lesquelles doivent être situées les quantités cherchées, mais son exemple ne fut pas suivi dans les autres Ouvrages strictement mathématiques où le calcul pratique en vint bientôt à n'être plus considéré que comme secondaire, et les mathématiciens proprement dits ne lui accordèrent point l'attention qu'il mérite : nous verrons plus tard le grand tort qu'une telle abstention devait causer aux Mathématiques elles-mêmes.

6. — L'infini.

On sait que Pythagore faisait du nombre le principe de toutes choses, en disant : *Les choses sont nombres*. Nombre signifiant chez les Grecs les nombres entiers, les nombres de la série numérique naturelle, cette sentence s'accorde bien, d'une façon générale, avec les études des pythagoricien, précédemment mentionnées sur la théorie des nombres entiers, comme avec le sens mystique qu'ils attribuaient à certaines relations numériques. Il reste, cependant, difficile de donner au texte de cette sentence une signification directement conforme aux mathématiques pythagoriciennes, et il faut, en effet, que cette signification immédiate ait été antérieure aux explications, plutôt idéalistes, données, par la suite, de la phrase en question.

Tels quels, les mots ne peuvent guère vouloir dire autre chose si ce n'est que tout est déterminable numériquement et, comme il ne saurait être question ici que de la grandeur des choses, le sens est que ces choses se peuvent exprimer par des nombres. C'est même effectivement le cas pour les grandeurs commensurables, quand on choisit une unité suffisamment petite, et il n'y aurait donc pas à s'étonner de la sentence si ce n'étaient, précisément, les pythagoriciens qui aient découvert que des quantités de même nature ne sont pas toujours commensurables : par conséquent, la sentence citée est fausse dans son sens littéral.

Toutefois, l'explication que nous venons de tenter, seule

conforme à l'usage grec du mot *nombre*, n'est pas, par cela même, nécessairement erronée : il se peut que la sentence pythagorique soit plus vieille que la découverte des quantités incommensurables, ou bien même, peut-être, est-ce en essayant de la justifier que l'on fut amené à découvrir ces quantités, et une formule philosophique à laquelle on a déjà attaché maintes considérations n'est pas si facilement mise de côté, alors même qu'on la reconnaît fausse dans son sens primitif : on doit s'efforcer de modifier ce sens de manière qu'il continue d'être applicable, ce qu'auraient peut-être même tenté de faire les pythagoriciens.

Pour le cas présent, pareille modification put être facile : on trouvait l'incommensurabilité des grandeurs en poussant à l'infini les calculs qui servaient à déterminer la plus grande commune mesure, et il n'y avait pas loin de là à soutenir que la plus grande commune mesure est alors infiniment petite, et contenue un nombre infini de fois dans les grandeurs. Dans ce cas, les choses étaient déterminées par des nombres infinis, ou par d'infinies approximations produites par les rapports entre des nombres toujours croissants.

Cette explication, cependant, ne serait guère admissible si l'on ne pouvait prouver que des mathématiciens, pythagoriciens et autres, ont vraiment de leur temps déterminé des quantités de cette manière, par approximation infinie. Sans doute, nous ne possédons aucun renseignement direct sur ces déterminations, mais la campagne qui fut menée contre elles, notamment par une autre école philosophique, celle d'Elée, en atteste l'existence et, par cette campagne, j'entends les fameux sophismes mis en avant vers le milieu du siècle par le fondateur de l'école éléate, Zénon : en général, ils ont pour but de montrer les incohérences auxquelles on aboutit quand on veut composer des grandeurs continues avec des particules infiniment petites en nombre infini.

Deux de ces sophismes démontrent que le mouvement est impossible, et la première démonstration est la suivante : pour aller d'un lieu à un autre il faut, avant d'atteindre ce dernier, accomplir d'abord la moitié du chemin, puis la moitié de la moitié, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, ce qui exige que l'on parcoure des bouts de route en

nombre infini. Ce mouvement, dit Zénon, est donc impossible.

Achille aux pieds rapides, dit encore Zénon dans un second sophisme, ne saurait rattraper la lente tortue, car il lui faut d'abord atteindre l'endroit qu'occupe actuellement la tortue, puis parcourir la route faite par la tortue dans l'intervalle, etc., à l'infini : mais cet infini est inépuisable.

Encore que Zénon ait subtilisé jusqu'à nier la réalité physique elle-même du mouvement, la considération sur laquelle il fonde son paradoxe nous intéresse : le mouvement qui, de sa nature, doit être continu, est impossible selon lui, parce que nous ne pouvons le concevoir tel, étant donné que nous ne pouvons exprimer le mouvement continu par décomposition en moments isolés et distincts. Ces décompositions qu'il combat doivent, cependant, avoir été tentées par ses adversaires. Voyons, au reste, ce qui en est : le premier sophisme met en jeu la justesse de cette assertion que

$$1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots \text{ jusqu'à l'infini,}$$

et, dans le second sophisme, il s'agit, si nous admettons que Achille se meuve n fois plus vite que la tortue, de ce que la somme $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots$ a une valeur finie si l'on augmente indéfiniment le nombre des termes.

Mais, au temps de Zénon, on savait sûrement calculer le temps nécessaire à Achille pour atteindre réellement la tortue ; les adversaires de Zénon savaient donc aussi que la valeur finie de la somme de termes en question, en nombre infini, est $\frac{n}{n-1}$, et les considérations que Zénon prétend absurdes impliquent si nettement ces résultats positifs, qu'à moins d'admettre, comme moi, que ce soient ses adversaires qui ont établi ces résultats, — ou de semblables, — il faudrait presque les lui attribuer à lui-même : car on ne se met pas ainsi, sans esprit mathématique et sans grande sagacité, à entreprendre *de chic* des décompositions aussi fructueuses au point de vue mathématique.

Nous voyons donc qu'au milieu du cinquième siècle on n'était pas sans s'être occupé de la sommation d'une série géométrique

infinie, sommation que nous verrons employée plus tard par Archimède, en d'autres formes et avec une sûreté plus grande.

A un point de vue strictement logique, pourtant, Zénon n'a pas tort : en effet, il ne peut être admissible qu'on se serve de quantités infinies pour démontrer des résultats positifs, tant que l'infini n'est expliqué que par son nom, car il n'y a dans son nom qu'une idée purement négative, à savoir qu'il ne peut être atteint. Dans les Mathématiques grecques, on se rangea du côté de Zénon, au point que l'idée d'infini comme moyen de démonstration positive fut, au siècle suivant, tout à fait rejetée, ou du moins traitée de manière à défier de semblables controverses.

Mais cela n'eut pas lieu tout de suite : l'école atomistique, qui considérait les corps physiques comme composés de particules indivisibles, se livra certainement à son tour à une investigation infinitésimale de la composition géométrique de ces corps. Ce fut au moins le cas pour Démocrite, l'homme le plus important de cette école, et l'on rapporte qu'il traita la question de savoir si deux sections planes de cône, parallèles et infiniment voisines l'une de l'autre, devaient être considérées comme égales ou inégales : dans le dernier cas le cône serait *scaliforme*, tandis que ce serait un cylindre dans le premier, et cette question se posait tout naturellement à qui voulait calculer par une sorte d'intégration le volume d'un cône, ou plutôt démontrer simplement les théorèmes sur l'égalité des cônes, à la manière dont le font d'ailleurs encore nos traités élémentaires. Que Démocrite se soit occupé de questions infinitésimales, les titres de plusieurs de ses écrits, tous perdus aujourd'hui, l'indiquent peut-être également : *Des lignes et des solides incommensurables, Des nombres;* peut-être aussi ce titre : *Du contact du cercle et de la sphère.* Néanmoins on ne sait rien de son œuvre mathématique et cela, probablement, par la raison qu'à l'époque suivante les Mathématiques furent cultivées surtout par des savants qui se rattachent à l'école de Platon et que cette école réprouvait complètement la philosophie de Démocrite.

Démocrite aurait donc approfondi l'idée d'infini de façon à assurer quelque autorité aux spéculations basées sur elle; il en aurait peut-être même montré l'emploi pour de véritables

investigations mathématiques, par exemple pour rechercher le volume du cône, mais cette idée ne put néanmoins se maintenir comme moyen admis de démonstration mathématique et, bien plus que la dialectique de Zénon qui, partant d'un point de vue philosophique, essayait de prouver l'insuffisance de l'idée d'infini pour établir des résultats nullement douteux en soi, les conclusions erronées auxquelles elle pouvait servir contribuèrent à battre en brèche cette idée même d'infini.

Comme exemple de ces conclusions, nous citerons la démonstration du sophiste Antiphon affirmant possible la quadrature du cercle, c'est-à-dire la construction exacte du carré précisément égal à un cercle donné, démonstration qui peut — si, du moins, nous nous en rapportons à ses adversaires — se résumer de la manière suivante : on peut construire, dans le cercle, un triangle équilatéral et, par suite, en divisant les arcs en deux, des polygones réguliers d'un nombre croissant de côtés ; en poursuivant cette construction à l'infini, le polygone se confond enfin avec le cercle. Tous les polygones étant carrables, conséquemment le cercle l'est aussi.

C'est par de tels abus que fut ébranlée la confiance dans les considérations d'ordre infinitésimal, et elle ne put se maintenir dans les mathématiques proprement exactes, quelque soin qu'ait apporté Aristote dans sa *Physique* pour montrer comment la continuité des changements est inhérente à la nature de l'espace, du temps et du mouvement. Les sophismes de Zénon, aussi bien que la réponse d'Aristote à ces sophismes, nous montrent toutefois que, si on laissa de côté les quantités infiniment petites, ce ne fut pas faute d'intelligence, mais en vertu d'un libre parti, dicté par des considérations logiques. La méthode inventée avant Aristote par Eudoxe rendait ce parti possible : elle permettait, en effet, de démontrer complètement, sans recourir aux quantités infiniment petites, la justesse des déductions en la matière, ce à quoi sert la preuve *par exhaustion;* mais je ne m'étendrai sur cette preuve qu'après en avoir vu les applications dans Euclide, et j'attendrai, de même, pour expliquer la *théorie des proportions d'Eudoxe,* qui est liée à la démonstration par exhaustion, que nous ayons rencontré cette théorie au cin-

quième Livre d'Euclide. Remarquons seulement ici qu'elle est immédiatement applicable, aussi bien aux quantités incommensurables que commensurables de sorte que, après Eudoxe, les proportions entre quantités incommensurables ont la même validité que les proportions entre quantités commensurables.

7. — La quadrature du cercle.

Passons désormais de ces questions de principe à certaines investigations particulières, commencées également au v[e] siècle, dont se sont occupés les mathématiciens durant toute la période antéeuclidienne, et même depuis : nous venons de faire allusion à la quadrature du cercle et il faut entendre, par là, aussi bien le problème qui consiste à calculer avec une approximation convenable la surface et la circonférence du cercle, que celui qui consiste à construire un carré égal à la surface du cercle et, de même, un segment égal à sa circonférence.

D'après ce qui fut dit précédemment on peut comprendre que la solution du dernier problème, de par son caractère et son utilité possible pour les calculs, devait apparaître digne de tous les efforts; et, en vue de cette solution, les mathématiciens jusqu'à Archimède négligèrent les calculs importants qui ne donnaient, avec toute leur difficulté, que des résultats inexacts : c'est le dégoût de pareils calculs qui conduisit Antiphon, nous l'avons déjà vu, à partir des polygones inscrits — excellent moyen de *calcul* — pour soutenir l'insoutenable à propos de la solution du problème *par construction*.

On connaissait bien aussi le moyen de calculer une limite supérieure pour la surface, à savoir les polygones circonscrits, mais on abusa également de ce moyen en des sophismes comme celui d'un certain Bryson qui, à ce qu'on raconte, prétendait que, pour carrer un cercle, il suffit de tracer le périmètre d'un nouveau polygone entre les périmètres d'un polygone inscrit et du polygone circonscrit correspondant : le nouveau polygone serait, en effet, et comme le cercle, plus grand que le polygone inscrit et plus petit que le polygone circonscrit, — donc (!) égal au cercle.

Avec la conclusion d'Antiphon, ce sophisme prouve du moins que l'on concevait déjà, à cette époque, le moyen d'effectuer et de contrôler les déterminations approximatives du cercle. On ne saurait reconnaître un tel mérite aux solutions qui consistaient à trouver un nombre à la fois nombre carré et nombre dit *cyclique,* c'est-à-dire dont le carré finit par le même chiffre que le nombre même. Mais on voit néanmoins, à ce grossier sophisme, que la lutte ouverte par Zénon, en mathématiques, contre les expressions inexactes ou incomplètes de pensées justes, n'eut pas pour résultat unique de contraindre les mathématiciens à donner plus de soin à l'exactitude de leur forme : inversement, elle apprit aux sophistes qui n'étaient pas en même temps mathématiciens à employer les formes mathématiques pour établir des conclusions saugrenues.

Cependant, quand Aristote et ses commentateurs, qui nous font connaître de tels exemples, accusent un mathématicien comme Hippocrate de Chios d'avoir utilisé de la sorte une fausse déduction pour effectuer la quadrature du cercle, il faut qu'ils aient confondu le but visé par Hippocrate avec le résultat qu'il présentait comme réellement obtenu. Cette accusation nous a valu toutefois de connaître les investigations d'Hippocrate qui, outre qu'elles ont conduit leur auteur à un résultat intéressant, savoir aux premières quadratures de surfaces limitées par des courbes, nous sont un excellent exemple des moyens dont disposait un bon géomètre du ve siècle, et du parti qu'il en savait tirer : c'est pour cette raison que nous donnerons ici un extrait des travaux d'Hippocrate tels que nous les rapporte Eudème.

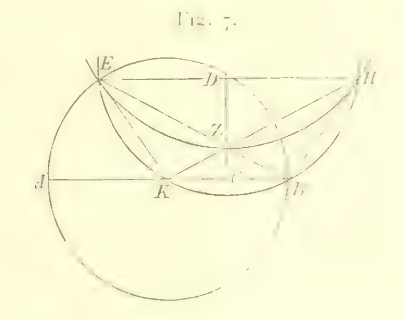
D'après lui, Hippocrate démontre tout d'abord que des segments semblables de cercle sont proportionnels aux carrés des diamètres, démonstration qu'il dut faire à l'aide du théorème correspondant sur deux cercles; le théorème démontré sert ensuite à carrer la *lunule* que limitent un demi-cercle et un arc de 90° sur le diamètre de ce demi-cercle, et pour démontrer que cette *lunule* est égale au triangle rectangle isoscèle ayant pour hypoténuse le diamètre du demi-cercle. Après quoi, il obtient de la manière suivante une lunule dont l'arc extérieur est plus grand qu'un demi-cercle : on

construit d'abord un trapèze, dont trois côtés sont égaux chacun à a, et le quatrième égal à $a\sqrt{3}$ (*en puissance trois fois aussi grand que les autres*, c'est-à-dire que son carré est trois fois aussi grand que le carré de chacun des autres côtés); on circonscrit un cercle à ce trapèze, et l'on prend la lunule comprise entre l'arc de la corde $a\sqrt{3}$ et un arc plus petit, sous-tendu par la même corde, et qui soit semblable à l'arc des cordes a. On voit alors que la *lunule* est égale au trapèze.

Hippocrate construisit encore une troisième lunule carrable : je vais rendre compte de cette construction et de l'usage qu'en fait l'auteur en reproduisant directement ici une partie du rapport d'Eudème ([1]).

« Soit un cercle qui ait pour diamètre la droite AB $(= 2r)$, pour centre le point K. Menons la droite CD perpendiculaire

Fig. 7.



sur le milieu de la droite BK. Inscrivons entre cette perpendiculaire et la circonférence la droite EZ, dirigée vers B et égale en puissance à une fois et demie le rayon $\left(= r\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Menons la droite EH parallèle à la droite AB. Joignons K à E et à Z. Soit en H la rencontre de la droite EH et du prolongement de celle menée de K à Z. Joignons enfin B à Z et à H.

([1]) Comme a essayé de le restituer P. Tannery dans les *Mémoires de la Société de Bordeaux*, t. V, 2e série, 2e fascicule, en le débarrassant des propositions ajoutées par Simplicius; les parenthèses ordinaires ne renferment que des additions explicatives, faites par P. Tannery à la traduction du texte grec.

Il est clair que l'une de ces deux dernières droites est le prolongement de la droite EZ qui tombe en B, que l'autre, la droite BH, sera égale à la droite EK. Ceci posé, le trapèze EKBH est inscriptible dans un cercle. Décrivons aussi le segment qui circonscrit le triangle EZH. ⟨Chacun des deux segments sur les droites EZ, ZH sera semblable à chacun des trois segments sur les droites EK, KB, BH.⟩

Ceci posé, la lunule formée sera égale au rectiligne composé des trois triangles « c'est-à-dire au pentagone EKBHZ... » ce que l'on peut démontrer par ce fait que chacun des deux segments situés sur EZ et ZH est égal à une fois et demie chacun des trois segments situés sur EK, KB et BH.

Hippocrate démontre encore que l'arc extérieur EKBH de cette lunule est plus petit qu'un demi-cercle, l'angle inscrit dans le segment EKH étant obtus, démonstration qui, avec nos signes, s'exprime de la manière suivante :

$$EZ^2 = \frac{3}{2} r^2 = EK^2 + \frac{1}{2} KB^2,$$

$$EZ^2 > EK^2 + KZ^2.$$

Que KB^2 soit plus grand que $2KZ^2$ doit résulter pour Hippocrate de ce que l'angle KZB est obtus, mais on ne dit pas, cependant, comment il le prouve, et il l'a conclu, probablement, de ce que son angle adjacent EZK, opposé à EK et plus petit que EZ, doit être aigu.

Dans le fragment qui nous est conservé l'on trouve encore la construction d'une lunule qui, ajoutée à un certain cercle, donne une surface carrable, et c'est précisément cette lunule dont la quadrature eût abouti à celle du cercle, mais elle n'est identique à aucune de celles antérieurement carrées et Hippocrate, qui était capable de construire lui-même ces lunules de telle sorte qu'elles fussent carrables, dut certainement, quoi qu'en dise Aristote, s'en apercevoir aussi bien que nous.

Pour donner, d'après les investigations qu'on vient de citer, une idée positive des travaux mathématiques d'alors, il faut remarquer tout de suite, à propos d'une construction comme

celle d'un trapèze au moyen de ses côtés, la brièveté de l'indication; retenons aussi que l'emploi des grandeurs des côtés d'un triangle pour rechercher si un angle du triangle est aigu, droit ou obtus, est considéré comme bien connu, tout comme le théorème suivant lequel les surfaces de cercles sont entre elles comme les carrés décrits sur les diamètres. Pourtant on ne pouvait connaître encore la démonstration euclidienne de cette dernière proposition, ni même aucune démonstration dont se fussent contentés les mathématiciens grecs qui vinrent ensuite, mais on aura pu néanmoins se convaincre de la justesse du théorème à l'aide de considérations comme celles dont abusait Antiphon.

On pouvait sans difficulté construire une ligne telle que $r\sqrt{\frac{3}{2}}$, soit par la méthode mentionnée en algèbre géométrique pour changer en un carré un rectangle de côtés r et $\frac{3}{2}r$, soit par application du théorème de Pythagore. *L'intercalation* de $EZ = r\sqrt{\frac{3}{2}}$ entre CD et la circonférence, de manière que son prolongement passe en B, dépend d'une équation du second degré qu'on savait résoudre à cette époque par construction géométrique, comme nous l'admettons avec assurance; cependant il est possible, et nous l'expliquerons bientôt, qu'on ait procédé différemment pour cette construction.

Les diverses tentatives faites pour carrer le cercle à l'aide de la règle et du compas furent infructueuses, et notre époque a démontré qu'elles devaient l'être. Aussi, le désir de trouver une solution exacte qui, selon les exigences d'alors, conduisît par construction à une représentation géométrique, ne pouvait-il être satisfait que par l'introduction d'autres courbes que la droite et le cercle; il ne s'agissait pas, d'ailleurs, d'obtenir mécaniquement de telles courbes, et encore moins d'en déterminer une série discontinue de points, car ces points n'eussent ainsi permis qu'une approximation. L'important, là comme en d'autres cas semblables, c'était, par une exacte définition, de constituer une base théorique

mathématiquement sûre, base sur laquelle on pût édifier au besoin de nouvelles investigations où figurât la quantité construite; on procéda en cela, comme nous procédons encore aujourd'hui, en introduisant des fonctions nouvelles pour la détermination de quantités qui ne se peuvent représenter qu'approximativement à l'aide des fonctions antérieurement connues.

Le mieux était alors, bien entendu, qu'une seule et même courbe pût servir à différentes constructions, et qu'ainsi la théorie générale d'une telle courbe fût heureusement applicable pour toutes les constructions.

Ce fut précisément le cas pour une courbe employée à la quadrature du cercle, nommée de ce fait *quadratrice,* et qui dut être imaginée par Hippias d'Élis pour un autre problème, celui de la tripartition de l'angle : en désignant par y l'ordonnée d'un de ses points dans un système de coordonnées rectangulaires, et par θ l'angle que fait le rayon vecteur du même point avec l'axe des abscisses, nous pouvons représenter la propriété d'après laquelle les anciens la définissaient au moyen de l'équation suivante

$$\frac{y}{b} = \frac{\theta}{\rho},$$

où nous désignons par ρ un angle droit et par b la valeur de y correspondante à $\theta = \rho$; les angles sont mesurés par les arcs qu'ils interceptent comme angles au centre d'un cercle de rayon b, de sorte que $\rho = b\frac{\pi}{2}$, avec la désignation maintenant usuelle de π.

y et θ étant proportionnels, on reconnaît tout de suite que cette courbe peut servir à la division d'un angle en parties égales, ou bien en parties telles qu'elles soient dans un rapport donné, et c'est Dinostrate, le premier, qui la reconnut applicable à la quadrature du cercle ou, du moins, qui démontra qu'elle l'était, en établissant que l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses est égale à $\frac{b^2}{\rho}$ ou $\frac{2b}{\pi}$; car le quotient $\frac{b^2}{\rho}$ ne peut être ni plus grand ni plus

petit que ladite abscisse : s'il était plus grand, les rayons vecteurs croissant avec θ, il existerait sur la courbe un point dont le rayon vecteur serait égal à $\frac{b^2}{\rho}$ et l'on devrait donc avoir (si, au lieu des proportions de Dinostrate nous employons, pour plus de clarté, nos équations et nos signes trigonométriques)

$$\frac{b^2}{\rho}\sin\varphi = y = b\frac{\varphi}{\rho} = \frac{b^2}{\rho}\frac{\varphi}{b},$$

c'est-à-dire que le sinus, dans le cercle de rayon $\frac{b^2}{\rho}$, devrait être égal à l'arc correspondant du même cercle ; si, au contraire, le quotient $\frac{b^2}{\rho}$ était plus petit que l'abscisse en question, il existerait sur la courbe un point d'abscisse $\frac{b^2}{\rho}$, pour lequel on aurait

$$\frac{b^2}{\rho}\operatorname{tang}\varphi = y = \frac{b^2}{\rho}\frac{\varphi}{b},$$

c'est-à-dire que la tangente, dans le cercle de rayon $\frac{b^2}{\rho}$, devrait être égale à l'arc correspondant du même cercle. Dans les deux cas, les conséquences sont impossibles.

En ce qui concerne la teneur de cette démonstration, on voit que Dinostrate ne se contente pas d'une remarque comme celle que nous exprimerions par $\lim \frac{\sin z}{z} = 1$, ou par $\lim \frac{\operatorname{tang} z}{z} = 1$, mais qu'il préfère tourner la question de l'approximation infinie en employant simplement les inégalités

$$\sin z < z < \operatorname{tang} z,$$

qui, du reste, sont toutes deux nécessaires pour déterminer chacune des deux valeurs limites. La façon dont il évite les déterminations directes de limites concorde bien avec ce qui a lieu dans la *démonstration par exhaustion* : Dinostrate n'est-il pas, au reste, le disciple d'Eudoxe qui la découvrit ?

Nous verrons plus tard que la dépendance entre les varia-

tions des arcs de cercle et des longueurs de droites, représentées par la quadratrice, a servi de fondement à certaines déterminations numériques.

Archimède, lui aussi, dont nous mentionnerons ultérieurement la mesure des cercles, fit des recherches sur des courbes susceptibles à peu près des mêmes applications que la quadratrice, à savoir les *spirales* dites d'*Archimède* ($r = a\theta$), qui peuvent servir à la division de l'angle — on le voit au premier coup d'œil — et, à la quadrature du cercle, qu'Archimède joint aussi bien à la détermination des tangentes qu'à celle des aires de ses spirales. A notre point de vue moderne, il semblerait plutôt employer la quadrature du cercle, ou le nombre π, pour les déterminations que nous venons d'indiquer; mais, en comparant son procédé à l'emploi de la quadratrice, on reconnaît qu'on attachait alors autant d'importance à obtenir par la voie qu'il suit, notamment par la détermination des tangentes, sinon une construction, du moins une bonne détermination géométrique d'un segment de droite qui fût égal à la circonférence du cercle.

La courbe, elle-même, montre à l'intuition d'une façon immédiate et claire la variation périodique de ce que nous nommons aujourd'hui les *fonctions circulaires*.

8. — Trisection de l'angle; intercalations.

Nous venons de dire un mot de l'application de la quadratrice et des spirales d'Archimède à la trisection de l'angle et, outre ces deux procédés, nous allons citer encore deux autres solutions de ce problème, solutions qui, de bonne heure, préoccupèrent les mathématiciens : l'une, dont on ne peut fixer la date, pourrait fort bien être du ve siècle, tandis que l'autre, comprise dans les lemmes soi-disant d'Archimède que nous ont conservés les Arabes, date peut-être d'Archimède. Ces deux solutions se ramènent à ce que nous appelons une *intercalation*.

1° Soit ABC l'angle qu'il faut diviser en trois parties égales : on tire d'abord AC perpendiculaire sur BC et AE, parallèle à BC; puis, entre AC et AE, on intercale DE = 2 AB, de telle sorte que son prolongement passe en B. F étant

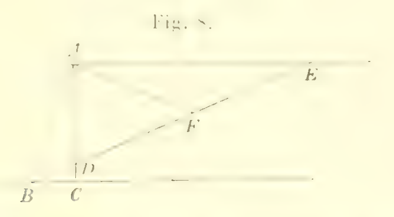
le milieu de DE, on a

$$\angle ABF = \angle AFB = 2\angle AEF = 2\angle CBD,$$

par conséquent

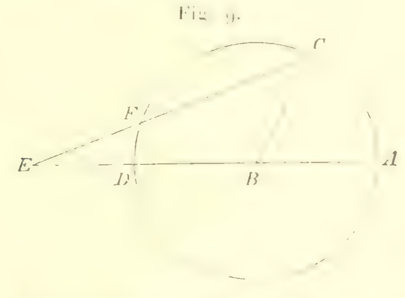
$$\angle CBD = \tfrac{1}{3}\angle CBA.$$

Fig. 8.



2° Soit ABC l'angle qu'il faut diviser en trois parties égales, et un cercle de centre B, coupant les deux côtés et le prolongement de AB au delà de B, en A, C et D : on inter-

Fig. 9.



cale, entre le prolongement de BD et la circonférence du cercle, EF = BC, de telle sorte que son prolongement passe en C. On a alors

$$\angle DEF = \tfrac{1}{2}\angle BFC = \tfrac{1}{2}\angle FCB = \tfrac{1}{3}\angle ABC.$$

Quant aux deux intercalations exigées pour ces solutions, elles sont, comme le problème posé l'est lui-même, dépendantes d'équations du troisième degré et, par conséquent, ne sauraient se résoudre à l'aide du cercle et de la droite.

Remarquons ici que la Géométrie grecque ramène souvent une construction à une intercalation sans dire au juste comment s'effectue cette opération : c'est le cas qui s'offre à nous dans le fragment cité d'Hippocrate, et Archimède en son Ou-

vrage sur les spirales ramène d'autres problèmes à l'intercalation même par laquelle fut effectuée cette trisection de l'angle que nous lui attribuons. Serait-ce là le signe qu'il y eut un temps où l'on admettait l'intercalation comme moyen de construction immédiatement applicable aux constructions géométriques, en plus de la règle et du compas? On entend ici par intercalation, en général, la construction d'un segment de droite dont les extrémités soient situées sur des lignes données et qui passe, lui-même ou son prolongement, par un point donné, segment que l'on peut, sans grande difficulté, obtenir mécaniquement au moyen d'une règle (ou d'un morceau de papier plié) sur laquelle on a fait préalablement deux marques à une distance égale à la longueur du segment donné, puis en faisant tourner cette règle autour du point fixe et la déplaçant en même temps de sorte que l'une des marques suive exactement l'une des lignes données : l'on continue ce mouvement jusqu'à ce que l'autre marque se trouve sur la deuxième ligne donnée.

Mais, à cause du but théorique que les Grecs avaient en vue dans ces constructions, ils ne se contentèrent pas longtemps de ce procédé mécanique facile et comme, en outre, afin de commettre le moins d'hypothèses possible, il ne fallait admettre que le minimum de moyens de construction possibles, on abandonna bientôt l'exécution directe des intercalations dans tous les cas où elles ne se pouvaient faire par la règle et le compas, seuls moyens de construction reconnus par Euclide dans ses *Éléments*. C'est alors, peut-être, un usage plus ancien de l'intercalation mécanique qui a provoqué les deux Livres écrits sur la matière par Apollonius et dans lesquels, comme nous le savons d'après Pappus, il traitait de l'exécution des intercalations à l'aide de la règle et du compas : sans doute voulut-il ainsi suppléer à la lacune des œuvres antérieures qui ramenaient des problèmes aux intercalations sans en donner le mode d'exécution.

Pour les intercalations qui se font, non au moyen de la règle et du compas mais en employant les sections coniques, il devint obligatoire, à partir d'une certaine date, de recourir à ces courbes, obligatoire, par conséquent, de ne plus se contenter du procédé mécanique; et, que ce ne fut qu'après

Archimède que cette nécessité s'imposa, on ne le peut nullement conclure en pleine assurance du fait que ce dernier se contente de ramener ses problèmes aux intercalations, sans rien dire de leur exécution, car l'usage ancien du procédé mécanique aurait bien pu provoquer avant lui, pour l'exécution de l'intercalation par les sections coniques, la création de règles constantes qu'Archimède pouvait considérer comme connues : Pappus nous a renseigné, en tout cas, sur la manière dont on peut exécuter par les sections coniques les intercalations mentionnées par Archimède.

Quand les intercalations ne se ramenaient pas, ou même ne pouvaient se ramener, ni à l'usage du compas et de la règle ni à celui des sections coniques, une investigation théorique de l'intercalation même devenait nécessaire, et la meilleure méthode était alors d'établir une définition et, basée sur cette définition, une investigation de la courbe que parcourait l'une des extrémités du segment donné, dans le procédé mécanique ci-dessus exposé, à savoir l'extrémité qui n'est pas reliée à l'une des lignes données : on résout alors le problème de l'intercalation au moyen des points d'intersection de cette courbe avec la deuxième ligne donnée. Une pareille investigation fut d'ailleurs entreprise par Nicomède, après l'époque d'Archimède, pour le cas où la première des lignes données est une droite : la courbe décrite alors se nomme *conchoïde* et Nicomède imagina, de plus, un appareil pour décrire cette courbe mécaniquement — l'emploi de cet appareil coïncide à peu près avec l'exécution mécanique d'une intercalation, ci-dessus exposée.

De quelque manière qu'on ait effectué l'intercalation, cette méthode de trisection de l'angle que nous avons attribuée à Archimède, sous toute réserve, a joué, par la suite, un rôle important dans les Mathématiques, et c'est notamment sur elle qu'est basée la solution que donne Viète pour les équations du troisième degré dans le cas dit *irréductible*.

9. — Duplication du cube.

Parmi les problèmes qui dépendent, sous leur forme algébrique, d'équations du troisième degré et que, postérieure-

ment, l'antiquité résolut par les sections coniques, la trisection de l'angle ne fut pas le seul auquel on s'attaqua au ve siècle, et celui qui représente la forme géométrique de l'équation cubique pure, en d'autres termes la *duplication* ou multiplication *du cube,* était plus important encore.

On appelle parfois ce dernier problème *problème délien,* à cause d'un oracle qui aurait prescrit de donner à un autel de forme cubique, dans l'île de Délos, une grandeur double, sans en changer la forme; — en cette occasion, la Pythie ne pourrait-elle pas, avoir été inspirée par les mathématiciens plus que par son dieu? Comme on l'a déjà dit, on avait, en Algèbre géométrique, transformé les produits de deux facteurs en général, et les expressions du second degré composées avec elles, en rectangles et en opérations de surfaces et, connexement, remplacé l'extraction de racine carrée par la transformation d'un rectangle en carré, problème que les pythagoriciens avaient sans doute résolu.

Il était tout naturel de passer de ces problèmes *plans* aux problèmes *solides* correspondants : on avait dès lors à représenter un produit de *trois* grandeurs par un parallélépipède et à remplacer les opérations relatives à des expressions du troisième degré par des opérations sur des figures solides. A côté de choses aussi simples que l'introduction d'une arête ou d'une base nouvelle dans un parallélépipède, et de leur application à l'addition et à la soustraction, ou que la transformation d'un parallélépipède à base rectangulaire en un autre à base carrée, le problème ayant pour but de changer un parallélépipède en un cube devait s'imposer forcément comme la question des racines cubiques se présente à un algébriste moderne après celle des racines carrées : la première racine cubique irrationnelle étant $\sqrt[3]{2}$, la *duplication du cube* fut le premier type des problèmes que nous voulons ici désigner, et ce problème, pour lui-même et pour les difficultés nouvelles qu'il comportait, devait éveiller un grand intérêt chez les mathématiciens.

La première contribution à la solution de cette question que nous trouvions mentionnée est attribuée à Hippocrate et, de même que la transformation d'un rectangle en carré repose sur la construction d'une moyenne proportionnelle, le

problème de la duplication du cube (donc, probablement, aussi, le problème un peu plus général du changement du parallélépipède en cube) est ramené par Hippocrate à cet autre : déterminer deux moyennes proportionnelles. En effet, le parallélépipède étant déjà changé en un autre a^2b, à base carrée a^2 et de hauteur b, et ce dernier devant à son tour être changé en un cube x^3, on détermine x par les proportions

$$a : x = x : y = y : b.$$

Que cette transformation soit, ou non, attribuable à Hippocrate, toujours est-il qu'après lui le problème *délien* se présente ordinairement sous la forme suivante : *Déterminer deux moyennes proportionnelles x et y aux segments donnés a et b.*

La première des nombreuses solutions que donna l'antiquité pour ce problème est due à Archytas : pour la bien comprendre, rappelons-nous qu'il s'agit de construire une figure composée de deux droites OYA et OBX, entre les-

Fig. 1.



quelles doit être tracée la ligne brisée AXYB, de telle sorte que XY soit perpendiculaire sur la première droite, AX et YB perpendiculaires sur la seconde, OA et OB ayant une longueur donnée ; en effet, OX et OY sont alors évidemment les deux moyennes proportionnelles entre OA et OB, et l'on connaît ainsi le diamètre OA d'un cercle sur lequel doit être situé X, mais non le diamètre OY d'un cercle sur lequel est situé B.

Archytas cherche à introduire ce dernier cercle comme cercle de section de la sphère dont le diamètre est OA ; OB étant donné, le point B sera situé sur une section plane de

cette sphère, la ligne OB et, par suite, le point X seront situés sur le cône de révolution qui a pour directrice ce cercle de section connu. Si, maintenant, on essaie d'obtenir la position voulue par rotation de la figure autour de la perpendiculaire OC élevée dans son plan, en O, sur OA, la projection Y du point X sur le plan parcouru par OA décrira un grand cercle et, par suite, la ligne XY une surface de cylindre sur laquelle sera également situé le point X; mais, pendant la rotation, X devant se maintenir sur le cercle de diamètre OA, il doit être situé sur la courbe que ce cercle, dans son mouvement, décrit sur la surface du cylindre, c'est-à-dire en réalité sur la ligne de section de la surface du cylindre avec le tore engendré par la rotation du cercle autour de sa tangente en O : on détermine alors le point X au moyen de l'intersection de cette courbe cylindrique et de la surface de cône indiquée ci-dessus, et cette détermination est la solution même du problème.

Cette solution, sans doute, ne fut guère appliquée à une détermination pratique, et ce qui l'indique c'est, entre autres choses, cette circonstance qu'il n'est point parlé de la génération réelle de la courbe gauche, le tore qui sert à cet objet n'étant, en effet, qu'une explication que nous avons interpolée : Archytas étant sûrement à même de reconnaître que, par essais successifs, on obtient de plus faciles et de plus exactes déterminations de AX et de AY, on voulait donc bien une détermination théorique qui pût servir à d'autres investigations où interviennent des racines cubiques. Cependant, pour que cette détermination, ainsi entendue, fût véritablement satisfaisante, il faudrait admettre qu'Archytas ait déjà connu la courbe gauche employée ou, du moins, ce qui est difficilement admissible, des méthodes permettant d'en trouver les propriétés.

Malgré tout, sa solution est pour nous d'une grande valeur comme preuve directe de ce dont il était capable. C'est guidé, en effet, par la pensée que le cercle est applicable à la solution du problème plan correspondant, qu'il a abordé cette autre question, alors bien connue : il recherche si la sphère, parallèlement, ne saurait servir à la solution du problème solide proposé, et il exécute cet essai avec la nette

intelligence des rapports d'espace qu'il rencontre; bien plus, il ne recule même pas devant l'introduction d'une courbe qu'un certain cercle, dans son mouvement, décrit sur un cylindre. Outre la fermeté des déductions, sa construction témoigne qu'il était assez familiarisé avec l'application des lieux géométriques à la détermination de points pour tenter de l'étendre à l'espace, et l'on se trouve de la sorte en droit de conclure que, à l'époque d'Archytas, la *Géométrie dans l'espace* et l'emploi des *lieux géométriques*, au moins *dans le plan*, avaient atteint déjà un degré de développement fort notable.

On rapporte qu'Eudoxe, disciple d'Archytas, employa d'autres courbes pour résoudre le même problème, et il put être conjecturé que ces courbes étaient les projections des courbes d'intersection des trois surfaces réellement employées dans la construction d'Archytas.

Ménechme, disciple d'Eudoxe, trouva à son tour le procédé qui servit après lui dans l'antiquité grecque pour résoudre ce problème, ainsi que beaucoup d'autres : les *sections coniques*. D'après des écrivains postérieurs, ce serait lui, en effet, qui aurait déterminé les deux moyennes proportionnelles entre a et b comme étant les coordonnées x et y du point d'intersection des courbes exprimées par deux des équations $ay = x^2$, $bx = y^2$, $xy = ab$; de plus, il aurait montré comment ces courbes, qui sont deux paraboles et une hyperbole, sont stéréométriquement représentables comme sections de cônes de révolution : nous reviendrons d'ailleurs sur ces déterminations lorsque, plus avancés dans notre étude générale, nous pourrons traiter uniquement le développement de la théorie des sections coniques.

Mais il nous faut encore ici parler, en passant, des autres moyens que l'on continua de découvrir ultérieurement pour la construction des deux moyennes proportionnelles : on imagina différents instruments mécaniques pour la construction d'une figure contenant, comme la *fig.* 10, des triangles semblables à l'aide desquels la relation demandée s'effectue directement; un de ces instruments est attribué à Platon, un second à Ératosthène, et puisque aucun de ces appareils n'eut d'importance réelle quant au développement des Mathématiques, nous nous épargnerons de les décrire, eux et l'usage

qu'on en faisait, en nous contentant de faire remarquer que ces appareils devaient inciter Descartes à en imaginer également un, qu'il décrit dans sa *Géométrie*.

La construction des deux moyennes proportionnelles fut encore ramenée à une intercalation par Nicomède; mais la construction qui lui sert dans cette opération est loin d'être aussi simple que celles qui sont employées pour la trisection de l'angle.

10. — Théorèmes et problèmes; sens et portée de la construction géométrique.

Nous avons d'abord parlé des principales conceptions et méthodes, nées au ve siècle, développées par la suite dans les Mathématiques grecques; nous avons donné, en citant certaines investigations particulières, des exemples de ce que ces Mathématiques contenaient alors de réel : à mesure qu'on progressait, on ressentait le besoin de *formes* plus constantes et plus sûres, qui s'accordassent avec les conceptions acquises en les affermissant encore davantage, et capables aussi de s'élargir pour embrasser les nouvelles acquisitions sans cesse accrues.

L'œuvre de l'école philosophique de Platon et de l'école mathématicienne d'Eudoxe consista précisément à élaborer ces formes, à les discuter en controverses.

Comme exemple d'un pareil travail, nous pouvons citer une discussion sur la question de savoir jusqu'à quel point les vérités mathématiques peuvent se présenter comme *théorèmes*, jusqu'à quel point comme *problèmes :* le parti des théorèmes était soutenu par les platoniciens qui s'appuyaient sur ce que la solution d'un problème n'établit qu'une chose existant déjà préalablement — ainsi les triangles équilatéraux existent indépendamment du fait qu'on les construit ou non, et l'on ne peut en construire un que parce que l'idée de *triangle équilatéral* a une existence réelle antérieure à toute construction; pour les disciples d'Eudoxe, que Ménechme représente particulièrement à cette occasion, l'objet essentiel était dans la manifestation des vérités mathématiques par construction sur les figures ou, du moins, par investigation.

En apparence, aucun des partis ne vainquit l'autre, puisque théorèmes et problèmes voisinent dans les *Éléments* d'Euclide, mais l'examen de ce qui caractérise foncièrement les théorèmes et les problèmes sera beaucoup plus important, et fut à peu près exprimé, plus tard, de la manière suivante : dans le théorème, on affirme ce qui est unique comme possible; dans le problème, on cherche ce qui est susceptible d'être autre. C'est à ces caractères que l'on doit distinguer si une vérité doit être exprimée sous une ou l'autre forme, de sorte qu'il serait faux, par exemple, de poser en problème : *Inscrire un angle droit dans un demi-cercle.*

De telles distinctions verbales importent toutefois beaucoup moins que le rôle joué par les théorèmes et, en particulier, par les problèmes, dans les écrits qui nous sont parvenus, notamment dans les *Éléments* d'Euclide; peut-être, aussi, ce rôle nous fait-il saisir le point de vue défendu par Ménechme et, cela, mieux que tous les renseignements possibles. D'après ces renseignements, en effet, les platoniciens faisaient valoir que le triangle équilatéral existe antérieurement à sa construction; au contraire, Ménechme prétendait sans nul doute que l'on n'apprend son existence réelle qu'en le construisant, et en y joignant la démonstration que cette construction aboutit véritablement au but qu'elle vise. C'est d'ailleurs ainsi que procède Euclide : il ne se contente pas de définir les triangles équilatéraux, mais, avant d'en faire usage, il s'assure de leur existence en résolvant, dans la première proposition de son premier Livre, le problème par lequel on construit ces triangles; puis il démontre la justesse de cette construction.

La nécessité d'un tel procédé se fera d'autant mieux sentir, d'elle-même, qu'il s'agira d'employer ensuite les triangles équilatéraux à de nouvelles constructions, mais il faut remarquer qu'Euclide procède de cette manière, même avec des objets qui, par la suite, ne devront être employés que pour la démonstration d'un théorème : avant de se permettre (Liv. I, 16) d'employer le milieu d'une ligne droite, il lui faut d'abord avoir démontré (Liv. I, 10), en le construisant, que ce point existe réellement; même procédé pour tous les cas semblables.

La *valeur* essentielle de la construction géométrique réside en ce qu'*elle doit servir à démontrer que cela même, à la détermination de quoi la construction aboutit, existe réellement*.

Il se peut que Ménechme soit le premier qui ait fait pleinement sentir cette signification des problèmes géométriques, résolus par construction, mais on en avait déjà conscience avant lui : l'Algèbre géométrique en est la meilleure preuve. Après avoir trouvé qu'il n'existe ni *nombre* ni *rapport numérique* (fraction) qui, multipliés par eux-mêmes, donnent 2, et lorsque, au lieu de rechercher un tel nombre, on cherchait un segment qui fût le côté d'un carré double du carré élevé sur un segment donné, il fallait démontrer tout d'abord l'existence d'un pareil segment, et c'est précisément ce que l'on fait en le représentant par la diagonale du carré élevé sur le segment donné.

La solution des équations générales du deuxième degré, à l'aide d'une construction, prend une signification semblable; et ce n'est qu'en tenant compte de cette conception générale que l'on comprend parfaitement le besoin ressenti de posséder une solution, par construction, pour la quadrature du cercle, la trisection de l'angle, la duplication du cube ou la détermination de deux moyennes proportionnelles. Sans cela, en effet, on ne saurait absolument pas comprendre que des solutions impropres à l'usage technique, comme celle de la quadrature du cercle par la quadratrice [1], ou comme la détermination par Archytas de moyennes proportionnelles, aient pu, en quoi que ce soit, satisfaire l'esprit grec : cette même conception, d'ailleurs, nous livrera la clef de quelques autres circonstances encore dans la Mathématique grecque.

Dans certains cas, au reste, nous comprenons assez bien cet emploi des constructions, et c'est le cas, notamment, si un problème, posé d'une manière tout à fait générale, n'est pas

---

[1] Cet exemple n'est peut-être pas tout à fait typique comme l'est le suivant; la preuve que la quadratrice coupe le diamètre axial en un point déterminé était en effet assez incomplète; d'autre part, la quadratrice, tracée par points, une fois pour toutes sur calibre, a pu réellement être employée pratiquement pour la division de l'angle dans un rapport donné (T).

toujours possible mais exige, pour l'être, certaines conditions particulières; en pareille occurrence, les écrivains grecs commencent par prouver la nécessité de ces conditions en démontrant un théorème qui dit que *la figure en question possède toujours les propriétés exigées par les conditions de possibilité :* ils démontrent ensuite que ces conditions *nécessaires* sont en même temps *suffisantes,* par l'intermédiaire d'un problème qui indique, les conditions étant remplies, comment on peut construire la figure — et démontrant que la figure est alors réellement établie. Le premier exemple de ce genre que nous possédions se trouve chez Euclide I, 20 et 22 : la première proposition comporte le théorème qui dit que chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres; la seconde proposition renferme le problème : construire un triangle pour lequel les côtés donnés satisfont tous trois à cette condition.

11. — Méthode analytique : forme analytique, synthétique d'exposition.

La plus importante des contributions, apportées à la forme des Mathématiques par les écoles d'Eudoxe [1] et de Platon, et qui donnèrent à ces Mathématiques la physionomie qu'elles ont dans Euclide et les mathématiciens grecs postérieurs, est certainement la création de la *méthode* dite *apagogique* ou *analytique,* et des formes d'*Analyse* et de *Synthèse* grâce auxquelles on s'assura, non seulement des résultats solides, mais encore une irréprochable exposition de ces résultats.

La méthode analytique trouve une application immédiate dans la solution des problèmes; aussi, en parlerons-nous tout d'abord.

Nous croyons, cependant, que la signification logique des règles établies, pour trouver et exposer la solution, se comprendra bien mieux si, momentanément, nous abandonnons le domaine des Mathématiques grecques pour parler d'une façon très générale de la solution analytique des problèmes.

---

(1) Les apports *réels* de l'école d'Eudoxe sont, d'ailleurs, plus importants pour les Mathématiques que cette contribution à leur *physionomie.*

en élucidant leurs applications par des exemples empruntés à des problèmes et à des ressources tout autres que ce dont disposaient les Grecs. Je veux indiquer, par là, et conformément à ses origines, l'usage conséquent qu'on peut faire en Mathématiques des mots *Analyse* et *Synthèse, analytique* et *synthétique*, usage que l'on devrait bien adopter pour faire cesser la confusion moderne, causée par l'exclusive application du mot *analyse* à l'analyse algébrique.

Un problème mathématique a pour but de trouver des quantités ou des figures qui satisfassent à certaines exigences. Dans la solution, on peut souvent deviner, en quelque sorte, en se basant sur des analogies avec d'autres problèmes, et l'on ne saurait nier que c'est par cette voie qu'on est peut-être parvenu tout d'abord à d'importants résultats; mais, malgré son excellence, une telle divination n'est pas une méthode proprement dite : dans tout traitement méthodique, il importe d'*analyser* les conditions posées, et il faut en premier lieu les avoir bien clairement à l'esprit, ce à quoi l'on parvient en se les imaginant remplies, donc *en s'imaginant le problème résolu;* il s'agit ensuite, par un moyen quelconque, selon des règles que nous tenons de problèmes analogues au problème traité, ou que nous inventerons nous-mêmes, de transformer les conditions à remplir en d'autres qui seront remplies *nécessairement* si les premières le sont, et de pousser cette transformation jusqu'à ce que l'on arrive, enfin, à des conditions auxquelles on sache satisfaire.

On trouve, par cette *analyse,* comment le problème *doit* se résoudre, *s'il est soluble.*

La *synthèse* consiste ensuite : d'abord, à réaliser cette solution, c'est-à-dire à déterminer les quantités et les figures cherchées de manière à satisfaire aux conditions requises et transformées; après quoi, il faut encore démontrer que les conditions primitivement posées sont, elles aussi, satisfaites. A défaut de procédé plus simple, cette démonstration s'opère, en règle générale, par une transformation des conditions selon un ordre inverse de celui qu'on observait dans l'analyse, de manière à conclure que, les conditions nouvelles par lesquelles on a remplacé les premières étant remplies, celles-ci le sont aussi *nécessairement* par là même. On peut omettre

cette démonstration, — ou bien on l'a déjà *toute faite* dans l'analyse, — si l'on ne s'est servi que de transformations réversibles, de sorte que les nouvelles conditions requises soient les conditions, non seulement nécessaires, mais suffisantes des premières; autrement, non.

Nous prendrons pour exemple la solution de problèmes par équations algébriques : on introduit des dénominations pour les quantités inconnues, et l'on fait entrer ces dénominations, absolument de la même manière que les désignations de quantités connues, dans les équations qui expriment les conditions posées; puis on imagine ces équations satisfaites — donc le problème comme résolu.

La transformation prémentionnée des conditions est alors représentée par la transformation des équations, jusqu'à ce que l'on parvienne à de nouvelles équations qui puissent fournir la solution : en Géométrie analytique (¹), par exemple, on forme de cette façon les équations de *lieux géométriques* qui permettent de résoudre le problème. Si l'on applique l'analyse à des problèmes ayant pour but de trouver les valeurs d'inconnues, les équations transformées seront celles mêmes où les inconnues sont isolées, et, pour nous en tenir à ce dernier cas, la synthèse consécutive à l'analyse consiste alors :

1° dans le calcul réel des quantités données par les expressions trouvées, y compris leur transformation selon des règles déterminées; par exemple leur simplification, leur réduction à l'irrationalité simple, etc.;

2° dans une vérification de ces quantités.

Cette vérification se fait, en règle générale, par substitution directe, mais on peut aussi l'exécuter, conformément à ce qui a été dit plus haut de la démonstration synthétique, en remontant pas à pas et dans l'ordre inverse, les équations employées; et il ne faut pas croire qu'une telle démonstration soit

(¹) Nous emploierons la désignation de *Géométrie analytique* dans le sens ordinaire, sans tenir compte de ce que la Géométrie pure peut aussi bien prendre la forme analytique, et de ce que l'on peut aussi bien opérer synthétiquement avec les moyens de calcul auxquels on a coutume de donner exclusivement le nom de *Géométrie analytique*.

rendue inutile par l'analyse qui l'a précédée : on le voit dans des cas où l'on a fait disparaître un radical par élévation à une puissance, car si cette expression était une des valeurs de la racine, par exemple la valeur positive d'une racine carrée, on sait bien alors qu'on peut introduire des solutions étrangères. Alors, au lieu d'une démonstration de la justesse, l'épreuve donnera une démonstration de l'inexactitude de ces dernières racines trouvées : l'analyse, seule, peut donc introduire des solutions étrangères.

Si la solution est préalablement connue, on peut se contenter de la donner synthétiquement, elle et sa démonstration, mais il est, à cela, un autre inconvénient : le problème étant, par exemple, celui de l'équation

$$x^2 - ax + b = 0,$$

ou un problème qui, ramené à une équation, s'exprimerait ainsi, on peut écrire par synthèse

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b},$$

et entendre, par le symbole de la racine carrée, la racine carrée positive ; mais si l'épreuve, ou la démonstration synthétique, prouvent alors que cette solution est juste, on ne voit pas cependant si elle est la seule juste.

Ce qu'on vient d'établir touchant la solution algébrique peut s'exprimer de la façon générale : *la seule analyse peut donner trop de solutions, la seule synthèse peut en donner trop peu.*

Cherchons encore en quel point du traitement complet se présentent les *conditions de possibilité.*

On les rattache ordinairement aujourd'hui tout à la fin de la solution formelle, que l'on *discute* seulement alors : dans l'exemple donné ci-dessus, on conclut de l'expression trouvée que, pour que x soit réel, $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ doit être $\geq b$, mais une telle discussion n'est possible qu'en admettant, sous les dénominations de *quantités négatives et imaginaires*, des quantités

qui n'étaient pas originellement attendues comme solutions : car, sans ces nouvelles espèces de grandeurs, on trouverait bien plus tôt la condition de possibilité, au cours de l'analyse.

Si, par exemple, on a déduit, de l'équation ci-dessus, que

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

l'on n'en saurait conclure

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

que si $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b$ puisque, autrement, le membre de droite n'a aucun sens.

On déduit donc, si l'on veut, de l'analyse les conditions de possibilité aussi bien que la solution, mais on peut, pour elles comme pour celle-ci, se contenter d'une exposition purement synthétique.

Les Grecs appliquaient la méthode de solution, que nous venons d'exposer, aux *problèmes géométriques*, dans lesquels il s'agit notamment, comme nous l'avons vu, de trouver une *construction*, soit réelle à l'aide de la règle et du compas, soit formelle. Tant que l'on cherche *méthodiquement* la solution de pareils problèmes on doit, d'après nos remarques générales, les traiter par l'analyse, genre de traitement qui devait être usité déjà par les pythagoriciens pour la solution géométrique des équations du second degré : cependant, il se peut que la méthode ait été plus ou moins consciemment appliquée car, comme cela s'est vu souvent dans l'histoire des Mathématiques, employer de fait une méthode n'est pas identique à l'élucider pour soi-même au point de savoir s'en servir chaque fois que le besoin s'en ressent et, encore moins, l'établir de telle façon qu'autrui la puisse utiliser.

La détermination que fait Archytas de deux moyennes proportionnelles revient à une construction qui fut évidemment trouvée par la méthode analytique. Archytas, en effet, n'avait pu deviner l'application de la courbe cylindrique, qui jusque-là lui était inconnue, et ce dut être exclusivement

l'application de l'analyse qui le conduisit à introduire cette courbe absolument comme lorsque, dans une investigation de Géométrie analytique moderne, un lieu géométrique, qui intervient pour la solution du problème, se manifeste sous l'aspect d'une courbe sur laquelle on ne savait rien auparavant, et qui se définit cependant par l'équation résultant de l'analyse.

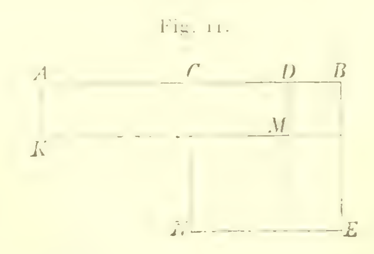
L'emploi de *lieux géométriques*, et la détermination même de ces lieux, présentent donc un autre exemple des applications de la méthode analytique qu'il faut faire remonter jusqu'aux pythagoriciens, mais ce fut avec les écoles fondées par les successeurs d'Archytas, Platon et Eudoxe, que cette méthode même atteignit à la forme qui, dans la suite, se maintint usuelle chez les mathématiciens grecs.

La méthode, en son application, et l'exposition des résultats acquis de la sorte, consistaient en une série de *termes* dont l'exposé se rattache très facilement à l'application elliptique de surfaces prise pour exemple (p. 37); mais nous allons exprimer ici les divers termes un peu plus brièvement que ne l'eussent fait les anciens.

1° Le problème se pose dans la *protase* (πρότασις) : appliquer, à un segment donné, une surface donnée, de telle sorte qu'un carré fasse défaut.

2° Le problème se rapporte, dans l'ecthèse (ἔκθεσις), à une figure tracée, et s'exprime : appliquer, sous forme de rec-

Fig. 11.



tangle, au segment AB le carré (tracé) q, de telle sorte qu'il manque un carré.

3° Dans l'apagoge, ou transformation (ἀπαγωγή), on suppose le problème résolu (au moyen du rectangle AM, qui laisse manquer le carré BM) et on le ramène de la manière sui-

vante à un problème connu : C étant le milieu de AB, on place le rectangle KC sur DB – et l'on a DE.

Le rectangle AM se transforme ainsi en un gnomon, ou bien en la différence des carrés CB^2 et CD^2 ; le segment CD doit donc être déterminé de façon que ce gnomon soit égal au carré q.

4° Dans la *résolution*, on examine jusqu'à quel point on est en possession réelle de tout ce que nécessite la solution du problème posé : cela n'a lieu, dans le cas présent, que si q, qui doit être juste aussi grand qu'un gnomon pris sur le carré CB^2, est au plus égal à ce carré.

Ceci étant remarqué, on s'aperçoit pourtant qu'il manque quelque chose au problème posé, car il est de règle, en effet, du moins dans ce qui nous fut transmis d'Œuvres mathématiques, que les problèmes soient posés avec une limitation telle qu'on les puisse résoudre : on obtient donc, au lieu du problème que nous avions essayé de poser ici, d'une part un *théorème,* d'autre part un *problème* plus limité.

Le théorème (qu'on trouve sous une forme un peu plus générale dans Euclide, VI, 27) a pour but de démontrer qu'un rectangle, appliqué sur un segment de manière que manque un carré, est inférieur ou égal au carré élevé sur le demi-segment; ou bien, si l'on veut, qu'un rectangle est moindre qu'un carré de même périmètre.

Le problème (qu'Euclide traite sous une forme plus générale, VI, 28) est le même que celui dont nous avons ici tenté la solution, mais avec cette addition, cependant, que le carré donné doit être au plus égal au carré élevé sur la moitié du segment donné.

Cette addition à la protase s'appelle *diorisme* (διορισμός), ou délimitation du problème; aussi faut-il, dans l'ecthèse, à propos des figures données, énoncer qu'elles satisfont à la condition ($q \leq CB^2$). Grâce à la *délimitation,* que nous supposons introduite ainsi dans la protase et dans l'ecthèse, la résolution, comme nous le verrons, devient absolument superflue; en effet, si l'on essaie de résoudre le problème, on réussira, et la résolution se confondra avec ce que la synthèse nous apprend, par la suite, touchant la façon de le résoudre; si, au contraire, au lieu de considérer la forme

sous laquelle les auteurs des Ouvrages conservés nous communiquent des résultats prêts, nous considérons l'application de la méthode à de nouvelles recherches, la résolution doit alors avoir joué un rôle important. En effet il fallait, au cours de l'analyse, vérifier constamment si l'apagoge était poussée suffisamment loin pour qu'il fût possible de résoudre le problème ; mais, en dehors de cela, la résolution était un moyen d'atteindre à ce que nous avons déjà (p. 75) qualifié comme étant le but principal du traitement des problèmes, à savoir la décomposition du problème primitif dans le théorème et le problème par lesquels on s'assure que les conditions d'existence de la figure demandée sont respectivement nécessaires et suffisantes.

Ce à quoi l'on arrive, tant en général que dans l'exemple proposé, c'est à la détermination d'un maximum ou d'un minimum.

Un autre résultat de la résolution devait être de donner le nombre de solutions possibles : ainsi, dans le cas présent, il est à remarquer qu'à la condition que CD^2 soit la grandeur juste, peu importe que D tombe de l'un ou de l'autre côté de C, circonstance à laquelle, tout en découvrant la valeur maximum de q, on a pu prêter attention ; toutefois les Grecs, pour qui la construction était surtout un moyen de s'assurer que la figure existait, n'attachèrent pas à ce fait d'importance particulière. Comme, en d'autres cas, la multiple signification d'un problème repose sur celle des problèmes auxquels il se ramène, si elle passe inaperçue dans ces derniers, l'analyse du premier ne la fera pas remarquer davantage, ce pourquoi l'on fut obligé de faire de certains cas, dans lesquels cette signification multiple semblait être aux Grecs de quelque importance, l'objet d'une investigation spéciale.

La transformation et la résolution constituent l'*analyse* au moyen de laquelle on trouve la solution ; et la solution trouvée est ensuite exprimée dans la *synthèse*, qui comprend :

5° La construction (κατασκευή) par laquelle on réalise l'objet des recherches à l'aide des procédés de construction reconnus. Il n'est pas question, toutefois, de nommer toutes les particularités, mais bien d'indiquer seulement les constructions antérieurement connues dont on composait la construc-

tion cherchée : détermination, dans notre exemple, de CD par le théorème de Pythagore, etc. La construction n'est donc, avec une légère variante de forme, que la répétition de ce qu'on a dit dans la résolution.

Notons encore que la construction, dont l'invention était pourtant, naturellement, la difficulté capitale de la recherche, n'est après tout qu'un des termes du traitement pris dans son ensemble, ce qui s'accorde bien avec le but déjà mis en relief de la solution des problèmes pour démontrer l'existence des figures qu'il fallait construire, but qui apparaît encore dans l'exposition des constructions. Cette forme d'exposition est absolument la même, comme nous l'expliquerons bientôt, que celle employée pour la construction des figures qui aident à démontrer les théorèmes : on dit toujours, à l'*impératif parfait,* que *ce point ait été pris,* que *cette ligne ait été tirée;* les constructions sont donc comme les hypothèses d'une science ou d'une intelligence, et ne constituent pas, pour exécuter le problème, des *règles* aussi catégoriques que nous ne les entendons aujourd'hui pour faire les solutions de nos problèmes de construction. La transition à cette dernière conception est déjà, du reste, dans les traductions latines qui propagèrent dans l'Europe moderne la connaissance de la Géométrie antique : dans ces traductions, en effet, on ne pouvait rendre l'impératif parfait que par le subjonctif *présent :* « Que ce point soit pris, que cette ligne soit tirée », ou : « Qu'on prenne, qu'on tire... ».

6° Ensuite on démontre (*démonstration,* ἀπόδειξις) que la construction a véritablement établi la figure demandée, démonstration qui s'opère, régulièrement, en employant les mêmes déductions que dans la transformation, mais en ordre inverse. Ainsi, dans notre exemple, on forme le rectangle AM, avec le gnomon, en plaçant le rectangle DE sur AC.

7° Enfin, dans la conclusion (συμπέρασμα), on affirme avoir véritablement atteint le but demandé : ce qu'on fait en reprenant la *protase,* avec la formule du début : « donc... », etc., et la formule de conclusion : « ce qu'il fallait faire ».

Tandis que l'*analyse,* comprise dans les n°s 3 et 4, c'est-à-dire dans la transformation et la résolution, est méthodiquement importante pour découvrir la solution, elle n'est

plus nécessaire dès qu'il ne s'agit que d'exposer d'une manière inattaquable ce qu'on a trouvé, ce qui fut toujours le principal but des écrivains grecs. On l'omet donc très souvent, de sorte que l'exposition ne consiste plus qu'en l'emploi des paragraphes numérotés 1, 2, 5, 6, 7; on obtient ainsi une forme que nous qualifierons de *synthétique*.

Cette forme synthétique s'emploie notamment pour le traitement systématique de toute une théorie dont les constructions étaient préalablement plus ou moins connues des auteurs, ou furent trouvées par eux et constituées en système comme dans les *Éléments* d'Euclide, ou dans la majeure partie de la théorie des sections coniques d'Apollonius. Du reste, les endroits où l'auteur expose également l'analyse n'y gagnent guère, à proprement parler; car, premièrement, on peut, d'après ce que nous avons dit, faire la *transformation* en intervertissant tout bonnement la série des déductions de la *démonstration*, et la *résolution* se confond alors avec la *construction;* et, deuxièmement, l'analyse donnée n'est que l'analyse du problème délimité par le diorisme et non, comme dans notre exemple primitif, celle qui put amener à cette *délimitation*.

Après avoir si longuement parlé de l'analyse de problèmes et de la représentation *synthétique* qui s'y rattache, nous pouvons passer plus rapidement sur l'application, aux théorèmes, de cette méthode et des formes correspondantes : la forme d'exposition synthétique consiste ici, ou en tout cas peut consister absolument dans les mêmes termes; on n'a qu'à remplacer partout *problème* par *théorème*. La *construction* ne consiste plus qu'à construire les lignes nécessaires pour aider à la démonstration, et elle se peut omettre, même, si ces lignes sont inutiles; quant à la *conclusion*, elle se termine ici par les mots : « ce qu'il fallait démontrer ».

Ces termes qui, à ce que l'on voit, sont aussi logiquement suffisants pour les théorèmes, se retrouvent partout dans Euclide, qu'il s'agisse de théorèmes ou de problèmes.

Cependant, pour les théorèmes mêmes, il peut être question d'une méthode analytique proprement dite et c'est le cas lorsqu'on veut vérifier si un théorème, énoncé par d'autres, ou

dont la découverte fut peut-être intuitive, est juste ou non : on commence par supposer juste le théorème en question, que nous désignerons par A, puis on transforme ce théorème par une série de déductions, absolument comme dans l'apagoge ou transformation pour les problèmes, jusqu'à ce que l'on voie qu'il conduit à un résultat nouveau K, dont on connaît la justesse ou la fausseté. Dans le premier cas, il n'y a encore qu'une possibilité, mais aucune certitude que A soit juste, car K peut dériver d'une série déductive où A n'est que d'un usage apparent et cela arrive, par exemple, même avec les ressources de l'Algèbre moderne, si dans les deux membres de l'équation posée l'on a, sans le remarquer, multiplié par une grandeur composée, qui en réalité se trouve être nulle. Une fois le résultat juste K dérivé de A, l'on vérifiera la justesse de A en remontant autant que possible la série déductive parcourue dans l'analyse, de manière que la justesse de K entraîne celle de A lui-même. Si tel est le cas, cette série déductive à rebours fournit la démonstration de la justesse de A, et l'on se contente d'exprimer cette démonstration sous la forme synthétique mentionnée plus haut, omission faite de l'analyse qui y conduisit.

Dans le cas où le résultat dérivé de A est faux, on peut au contraire conclure tout de suite que A est faux, ou bien, A et B étant deux affirmations dont l'une doit nécessairement être vraie, l'affirmation que B est vraie peut être établie comme théorème qu'on démontrera par le raisonnement suivant : l'hypothèse de B faux, ou de A juste, conduirait au faux résultat K. Une telle démonstration par antithèse est apagogique, donc proprement analytique : étant donné, toutefois, qu'elle assure la pleine évidence que l'affirmation B est juste, on s'en sert diversement dans des Ouvrages où la représentation est par ailleurs synthétique, fréquemment par exemple dans les *Éléments* d'Euclide.

Cette forme antithétique de démonstration fut aussi appliquée par Dinostrate à la quadratrice (p. 63) et on l'employa constamment, comme nous le verrons, dans la démonstration par exhaustion.

Enfin, le théorème que nous avons obtenu comme résultat secondaire quand nous avons tenté plus haut d'établir, sans

limitation préalable, l'application elliptique des surfaces (p. 82) nous est un bon exemple pour prouver qu'un théorème ne se déduit pas nécessairement d'une analyse du théorème même supposé vrai, ou de celle de son antithèse, mais de l'analyse d'un problème connexe.

12. — « Éléments »; moyens auxiliaires d'analyse.

Qu'on se serve de l'Analyse pour trouver la solution d'un problème ou la démonstration d'un théorème, ou qu'on se serve de la Synthèse pour exposer ce qu'on a trouvé, la solution se composera toujours de solutions de problèmes plus simples, et la démonstration se basera toujours sur la justesse de propositions plus simples, en supposant que l'on soit en possession préalable de ces problèmes ou propositions plus simples. Afin de pouvoir avancer par les procédés que nous venons de décrire, on doit donc disposer, tout d'abord, d'une collection de solutions pour des problèmes et des théorèmes plus faciles, et prendre ces solutions comme point de départ.

Les Ouvrages qui renferment ces collections s'appellent des *Éléments*.

Les premiers Éléments dont il soit parlé furent écrits par Hippocrate, mais, malheureusement, nous ne connaissons point cette œuvre si ancienne de l'ingénieux géomètre qui, paraît-il, était assez indépendant des Écoles philosophiques. Les progrès, réels et formels, accomplis entre temps dans les Écoles, furent plus tard réunis en de nouveaux Éléments. L'on attribue l'un de ces progrès, à savoir les délimitations ou diorismes, à un écrivain qui, après Hippocrate, composa également des Éléments, Léon : ses Éléments, et d'autres plus récents, ont été perdus au moment où ceux d'Euclide eurent conquis cette universelle autorité qu'ils devaient conserver, pendant plus de deux mille ans, partout où pénétrèrent les Mathématiques grecques.

Nous nous occuperons très en détail de cette œuvre capitale : en l'étudiant, nous verrons combien la matière en est solide, composée de théorèmes et de problèmes exposés synthétiquement, et quelle base ferme cela devait faire pour l'édifice mathématique établi sur elle. Il se peut toutefois que,

pour les investigations qui aboutissent à ce résultat, le besoin se soit fait sentir de posséder, outre ces Éléments d'une rigueur logique d'un bout à l'autre, des moyens dont la forme s'appropriât davantage au travail analytique : on a des exemples antérieurs et postérieurs à Euclide d'une telle recherche, et nous en devons un à Euclide même. C'est ainsi qu'un successeur d'Eudoxe, Hermotimus, aurait écrit sur les lieux géométriques, probablement sur les lieux dits *plans*, c'est-à-dire représentables par une droite ou un cercle ; plus tard, également sur le même sujet, le grand géomètre Apollonius écrivit deux livres : ce qu'on sait de leur contenu contribua grandement, dans les temps modernes, à la formation de la Géométrie analytique.

Nous devons encore mentionner les *Data* d'Euclide comme instruments auxiliaires de la méthode analytique : cet Ouvrage, quant à sa matière, ne sort pas des Éléments, mais il les exprime sous une autre forme ; les propositions y ont communément pour but de prouver que, certaines quantités ou portions d'une figure étant « données », certaines autres le sont aussi, c'est-à-dire qu'elles se déterminent à l'aide des premières. Les premières propositions du livre affirment que des quantités données ont un rapport donné, une somme donnée, etc ; une proposition ultérieure, que des droites données se coupent en un point donné ; d'autres établissent les conditions pour qu'un triangle, selon son espèce, soit donné, c'est-à-dire soit semblable à un triangle donné ; d'autres encore expriment que deux quantités dont on donne la somme, ou la différence, ainsi que le rectangle, sont elles-mêmes données, etc.

La valeur de ce livre est évidente comme instrument auxiliaire d'analyse : il s'agissait, dans la « transformation », de trouver dans la figure, pourvue au besoin de lignes auxiliaires, des parties connues susceptibles de déterminer les parties inconnues, et s'il faut ensuite, dans la résolution, justifier que l'on dispose réellement de ce qu'exige la solution du problème, on ne le peut faire mieux qu'en citant les propositions nécessaires sous la forme que leur donnent les *Data*.

Certaines propositions des *Data* nous font en outre pénétrer quelques-unes des méthodes plus spéciales d'analyse

qu'on avait à sa disposition : ainsi, dans les *Data*, il n'est pas seulement question de trouver quelles données peuvent déterminer un triangle, mais encore quelles données en déterminent uniquement la forme. Il est permis d'en conclure qu'on ne résolvait pas seulement les problèmes en recherchant, dans la figure, les triangles par la construction desquels on pût commencer la solution du problème, mais encore en en cherchant dont la forme fût seule déterminée, et la construction d'un triangle de cette forme ne pouvait en général servir de point de départ qu'à la construction provisoire d'une figure semblable à la figure cherchée; après quoi, il se fût agi d'introduire la grandeur réelle de quelque segment. Effectivement, dans les Mathématiques grecques, il se présente des problèmes que l'on résout ainsi.

La réduction d'un problème à la détermination de deux quantités dont on connaît le produit (leur rectangle) et la somme ou la différence, c'est-à-dire à la solution géométrique d'équations du second degré, apparaît, d'après les théorèmes des *Data* cités plus haut, comme étant une méthode applicable, et qui fut souvent employée par les mathématiciens grecs. Nous verrons plus tard que d'autres théorèmes des *Data* trahissent encore la connaissance d'équations plus compliquées, qui s'expriment au moyen des proportions et de l'Algèbre géométrique.

13. — Aperçu des Éléments d'Euclide; système synthétique.

Les *Éléments* d'Euclide se composent de treize Livres auxquels on adjoint comme quatorzième, dans la plupart des éditions, un travail d'Hypsiclès et, comme quinzième, un travail plus récent et de moindre importance.

Le premier Livre renferme les plus importantes propositions sur les côtés et les angles dans les triangles, sur la construction de ces derniers, sur les droites perpendiculaires et parallèles, sur les parallélogrammes et sur leur surface ainsi que sur celle des triangles. Le deuxième Livre contient les principes déjà exposés de l'Algèbre géométrique. Le troisième, la théorie du cercle, des lignes et des angles dans le cercle, ainsi

que le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Le quatrième Livre traite des polygones inscrits et circonscrits, notamment de la construction des triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone et décagone réguliers.

Sans doute, le travail personnel d'Euclide dans ces divers Livres fut particulièrement d'ordonner et d'exposer toute cette matière, déjà connue, d'une façon plus précise qu'elle ne l'avait été jusqu'alors, en se conformant aux formes rigoureuses dont l'exigence s'était développée entre temps chez les Grecs; mais, à cette besogne, dut se joindre un travail mathématique proprement dit : les proportions furent en effet, comme nous l'avons déjà vu, employées en Géométrie, même avant que fût née la théorie exacte des proportions d'Eudoxe. Lorsque, en maintes occasions, l'on devait recourir à une théorie des proportions, fondée uniquement sur la théorie des grandeurs rationnelles, il n'importait guère que ces applications trouvassent leur place dans le système un peu plus tôt ou un peu plus tard.

Mais Euclide, lui, connaissait la théorie d'Eudoxe sur les proportions, et comme elle était trop nouvelle, toutefois, pour trouver place au début du système, il la rejeta au cinquième Livre. Il fallait donc, avant d'y arriver, éviter absolument tout emploi, ouvert ou caché, des proportions et de la similitude, et il est probable, par exemple, que c'est précisément cette considération qui contraignit Euclide, ainsi que nous en avons dit un mot, à imaginer la démonstration du théorème de Pythagore qui se trouve à la fin de son premier Livre.

Pour faire comprendre qu'il était possible d'aller aussi loin sans les proportions, je rappellerai que c'est à l'aide de l'Algèbre géométrique que sont démontrées les propositions sur la puissance d'un point par rapport à un cercle (III, 35-37) : ces théorèmes s'emploient pour construire un triangle isoscèle dans lequel l'angle au sommet est la moitié de l'angle à la base (IV, 10), la base étant alors le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le même cercle que ce triangle (IV, 11).

Dans le cinquième Livre est exposée la théorie des proportions d'Eudoxe et, dans le sixième, ses applications à la Géométrie et à l'extension de l'Algèbre géométrique. La construction des moyennes proportionnelles et la division d'un

segment en moyenne et extrême raison, obtenues déjà sous une autre forme au deuxième Livre par l'Algèbre géométrique, reparaissent ici, mais résolues cette fois à l'aide des proportions, savoir dans VI, 13 et 30.

Combien, parmi les théorèmes et démonstrations de ces Livres, appartiennent à Eudoxe? combien se rattachaient antérieurement à une théorie moins développée des proportions? c'est ce que nous ignorons; mais toujours est-il que c'est à Euclide que revient l'honneur d'avoir disposé le tout en un ensemble systématique.

Il n'a cependant point fait entrer dans cet ensemble la théorie spéciale des grandeurs rationnelles et des nombres entiers grâce aux rapports desquels s'expriment ces grandeurs, et il expose cette théorie, du VIIe au IXe Livre, c'est-à-dire après la théorie générale des proportions, mais sans la fonder sur cette dernière. Les démonstrations sont vraisemblablement celles que l'on employait avant l'époque d'Eudoxe, et dont on étendit alors les résultats aux grandeurs irrationnelles elles-mêmes.

Les grandeurs irrationnelles, à leur tour, sont traitées dans le dixième Livre : c'est là que se trouve leur classification, commencée par Théétète (*cf.* p. 46)), mais que devait achever Euclide. C'est en cela, et dans l'application de ce classement à la détermination des arêtes des polyèdres réguliers, que consista sans doute la part la plus originale du travail d'Euclide.

Mais, avant cette application, il était nécessaire de développer la Stéréométrie élémentaire, ce que fait le onzième Livre; le calcul du volume des pyramides exige alors des déterminations infinitésimales de limites que l'on obtient, quoique par un détour de forme, au moyen de la démonstration par exhaustion d'Eudoxe, employée à cet effet dans le douzième Livre après l'avoir été, tout d'abord, à démontrer que deux cercles sont proportionnels aux carrés élevés sur leurs diamètres. La détermination des éléments des polyèdres réguliers n'a lieu qu'au treizième livre.

Jusqu'à un certain point, on voit que les objets de même nature, comme la théorie des grandeurs irrationnelles, et les méthodes similaires, comme les applications de la démon-

stration par exhaustion, sont rapprochés les uns des autres ; toutefois, ce rapprochement doit être mis en partie sur le compte de l'évolution historique antérieure. Pour Euclide, ce rapprochement n'a qu'une importance secondaire, pour être subordonné à la considération suivante : tout en tenant compte des principes logiques et rigoureux développés à l'époque précédente, principes au perfectionnement desquels Euclide avait lui-même contribué par son traité des fausses conclusions, l'important était que l'œuvre fût logiquement inattaquable, qualité qui était garantie comme nous l'avons vu à chaque problème ou théorème particulier par l'exposition synthétique ; mais il s'agissait en outre, tant dans chaque livre séparément que dans tout l'ensemble, d'ordonner les problèmes et théorèmes de telle sorte que la base et les matériaux de chaque nouveau théorème (ou problème) fussent déjà fournis par les précédents. C'est en vertu de ce principe qu'Euclide ne se permettait même pas d'employer le milieu d'un segment dans une démonstration avant d'en avoir, antérieurement, prouvé l'existence par construction.

Cet ensemble de propositions, cette liaison à l'aide de laquelle on va du connu à l'inconnu, comme pour la démonstration synthétique d'une proposition détachée, c'est-à-dire on s'élève du simple et du particulier au composé et au général, constitue ce que nous appellerons un *système synthétique*, encore que l'antiquité ne nous offre aucune justification directe de cette appellation et, dans un tel système, le point de départ et la conclusion présentent un intérêt tout particulier.

Pour ce qui est du point de départ, il est clair que les problèmes, qui se composent de solutions fournies par des problèmes antérieurs, et que les théorèmes, dont les démonstrations s'appuient sur des théorèmes et des problèmes précédents, doivent supposer certaines constructions *premières* et préalables dont l'exécution est, sans plus, considérée comme connue, ainsi que certaines affirmations *premières* dont la justesse est regardée comme directement évidente : ces constructions, pour Euclide, se nomment *postulats* ou *demandes* (αἰτήματα), et ces affirmations, *notions communes* (κοιναὶ ἔννοιαι) ; mais, au lieu de ce dernier mot, on rencontre communément chez les autres écrivains, notam-

ment chez les écrivains philosophiques, le mot *axiomes* (ἀξιώματα). Avant ces deux sortes de *présuppositions*, il faut d'abord établir les *concepts* auxquels elles ont trait, ce que l'on fait dans les définitions (ὅροι).

Aussi allons-nous nous occuper, dans le § 14, des *idées* et des *hypothèses* établies de la sorte par Euclide, ce qui nous apprendra par la même occasion ce que les anciens exigeaient en général de leurs hypothèses.

Outre les hypothèses préalables, la conclusion, elle aussi, mérite une certaine attention dans un système synthétique, puisque tout ce qui la précède semble n'être disposé que pour servir de prémisses à cette conclusion même. Il est vrai que si, comme nous l'avons déjà dit, Euclide termine ses *Éléments* par la détermination des arêtes des polyèdres réguliers et par la construction qui en résulte pour ces polyèdres, ce ne fut pas là son unique but, puisque, au cours de son œuvre, il embrasse maintes questions qui ne servent ni directement ni indirectement à cette détermination; il a donc plutôt établi un fondement général aux futures investigations mathématiques et, sûrement, c'est bien là ce qu'il voulait, mais l'importance que la construction des polyèdres réguliers puise dans ce privilège de couronner l'œuvre d'Euclide fut cause, néanmoins, que l'on ait introduit de très bonne heure des travaux étrangers sur ces polyèdres à titre de quatorzième et de quinzième Livres.

D'une façon plus précise il s'agit, dans le premier Livre d'Euclide, pris séparément, de trouver ce qui est logiquement nécessaire pour établir l'Algèbre géométrique développée au Livre suivant; la base de cette Algèbre sera la conclusion même du premier Livre, à savoir, le théorème du *gnomon*, I, 43, et le théorème de Pythagore, I, 47. Un but provisoire se subordonne néanmoins au but principal : c'est le théorème (32) sur la somme des angles d'un triangle qui se trouve nécessaire pour le but principal et qu'Euclide rattache, au milieu du Livre, à la théorie des parallèles. Du reste, ce Livre comprend des théorèmes sur la situation respective des lignes droites, sur les droites perpendiculaires et parallèles, avec constructions appropriées, sur la congruence et la construction des triangles, et sur la dépendance entre l'égalité et

l'inégalité des côtés et des angles ; il y a là un mélange qui n'est pas très clair, mais qui est cependant une conséquence de la méthode, logiquement sûre, d'après laquelle les théorèmes s'édifient les uns sur les autres : mentionnons, pour exemple, que les théorèmes sur la congruence des triangles sont les théorèmes 4, 8 et 26, et qu'Euclide ne se préoccupe nullement à cette occasion de rechercher la congruence de triangles dont un angle, un côté adjacent et un côté opposé se correspondent. En effet, il n'a pas à employer pareils théorèmes.

Au contraire, au sixième Livre, où il réunit les théorèmes sur la similitude des triangles, il ne néglige pas le cas correspondant de la similitude. A la fin du Livre, les théorèmes sur l'égalité des surfaces sont plus étroitement rattachés les uns aux autres.

Puisque nous avons exposé ici la conception d'un *système synthétique de théorie,* nous dirons un mot sur ce que nous entendrions par *système analytique,* par antithèse et aussi parce que, en dehors de toute considération d'application aux écrits des Anciens, nous désirons éclaircir pleinement les idées d'analyse et de synthèse.

Dans un système synthétique, l'on ne s'élève que peu à peu à la considération de rapports plus composés et plus généraux ; dans un système analytique, au contraire, on part d'un principe général capable, de par sa généralité même, de présenter une certaine simplicité, et l'on fait découler de ce principe les relations à établir dans les divers cas particuliers. Un traitement de la Géométrie dans lequel l'on commence par la ligne droite et le cercle, pour s'élever, successivement, aux sections coniques et aux courbes d'un degré supérieur, est foncièrement un *traitement synthétique,* même si les particularités y sont traitées analytiquement ; mais un traitement dans lequel on recherche tout de suite les propriétés générales des courbes pour en tirer des théorèmes particuliers sur la droite ou les sections coniques est, lui, foncièrement *analytique.*

Nous avons un exemple typique de traitement par analyse dans la Mécanique analytique de Lagrange où tout dérive du principe des *vitesses virtuelles :* et si ce principe n'était pris qu'à titre d'hypothèse qui dût être démontrée par ses applications ou ses conséquences, le procédé serait absolument conforme à l'application de la méthode analytique aux théorèmes particuliers, telle que nous l'entendons. Si le principe est, comme chez Lagrange, établi au préalable, le procédé employé est encore, cependant, essentiellement le même et, en l'appelant *analytique,* on ne s'écarte pas du sens que nous avons attribué à ce mot.

Au reste, c'est en avançant synthétiquement du plus spécial au plus général que l'on parvient, en bonne règle, au point de vue d'où peut partir ensuite un système analytique.

14. — Hypothèses géométriques d'Euclide ([1]).

Les hypothèses sur lesquelles Euclide fonde la Géométrie se trouvent dans les définitions, postulats et axiomes, de ses différents Livres.

Celles du premier Livre offrent un intérêt particulier parce qu'elles sont, avec les résultats successivement édifiés sur elles, à la base de celles des autres livres; aussi nous y arrêterons-nous, mais en les complétant tout de suite avec quelques-unes des hypothèses nouvelles, introduites ultérieurement : pour celles qui se rapportent à des théories particulières, comme la théorie des proportions, nous n'en parlerons qu'à propos de ces théories mêmes.

On trouvera certainement, à la première lecture des définitions, postulats et axiomes d'Euclide, qu'ils ne sont nullement au niveau des prétentions de forme et de logique élevées, comme nous l'avons dit, par les anciens : on y verra, par exemple, que diverses définitions ne disent absolument rien de ce qui est à définir, et ne donnent aucune garantie du fait qu'il existe réellement quelque objet répondant aux définitions.

La définition de la ligne droite ([2]) n'apprend rien de mieux que si l'on eût dit : il y a une certaine espèce de lignes, qui s'appellent *droites*. Quelle sorte de lignes elles sont, c'est-à-dire quelles sont les propriétés des lignes qu'on emploierait de nos jours à la définition, il faut attendre, pour le savoir,

---

([1]) Hypothèse au sens général et vulgaire du mot; mais le contexte semble suffisamment l'éclaircir. *Suppositions* serait plus conforme au langage vulgaire.

([2]) Les définitions de la droite et du plan, dans Euclide, sont d'ailleurs obscures et leur véritable sens était déjà perdu du temps de Proclus : « La ligne droite est celle qui est *ex æquo* en tous ses points. » — « Le plan est la surface qui est *ex æquo* pour toutes les droites qui y sont situées. » Ces définitions paraissent provenir de la technique de l'art de bâtir, et n'avoir dès lors qu'une portée empirique (T).

les postulats qui contiennent l'hypothèse que la ligne droite possède telle et telle propriété : les postulats mêmes, et les axiomes, sont souvent exprimés avec une brièveté qui les transforme en énigmes et qui est en opposition frappante avec les détails circonstanciés traitant tout ce qui est théorème et démonstration proprement mathématiques.

Le fait est que le mathématicien renvoie aux définitions, postulats et axiomes, toutes les hypothèses qu'il se croit autorisé à faire dans son domaine et, cela, sans explications du *comment*, ni raison du *pourquoi*.

Le devoir du mathématicien est de donner préalablement la spécification complète de ce qu'il veut supposer et, en outre, de le faire assez clairement pour que, le cas de s'en servir échéant, il en résulte évidemment qu'il ne tire exactement parti que de ce à quoi il s'est réservé le droit de recourir; mais les abstractions qui l'ont conduit à établir les notions préalables et à leur attribuer, dans les postulats et les axiomes, les propriétés déterminées qu'il leur donne, bien plus même, la preuve préalable qu'il ne leur a réellement attribué ni trop ni trop peu de propriétés, tout cela ne le regarde pas. Il n'est, en sa qualité de mathématicien responsable que d'une chose : c'est de mettre celui qui lui concède toutes ses hypothèses dans la nécessité, par des déductions certaines, de lui concéder de même tout ce qu'il en déduira lui-même.

Ainsi, sa conclusion devra pratiquement prouver qu'il a fait un nombre suffisant d'hypothèses. Le fait qu'il n'ait pas émis trop d'hypothèses ne saurait être prouvé aussi directement; mais, s'il avait commis cette faute, il serait exposé à se voir prouver, par d'autres, que *telles de ses hypothèses étaient contradictoires*, ou *pouvaient dériver les unes des autres*.

Pour bien juger les hypothèses géométriques expressément établies par les anciens, notamment par Euclide, il faut considérer *quelles* elles sont, plutôt que de s'attacher au manque d'indications sur leur origine, ou à la forme sous laquelle elles sont présentées. On voit alors que ce sont les mêmes que celles sur lesquelles aujourd'hui encore nous basons la Géométrie, et qu'elles ont été présentées avec une sûreté et

une plénitude dignes de continuer à servir de modèle à ceux qui pourraient avoir l'occasion d'en compléter ou d'en modifier certains points; toutefois, afin de les comprendre entièrement, nous devrons çà et là toucher aux formes insuffisantes (pour une intelligence moderne du moins) sous lesquelles interviennent plusieurs d'entre elles.

Commençons par tirer au clair les *définitions* qui peuvent donner lieu à quelques remarques.

Le *point* est défini par son *indivisibilité* (I, déf. 1). Puis on passe à la *ligne :* longueur sans largeur (I, 2), à la *surface*, avec longueur et largeur (I, 5), et au *solide :* longueur, largeur et épaisseur (XI, 1).

Ces définitions n'élucident nullement comment on parvient aux concepts de point, ligne, surface et solide; mais, comme une hypothèse sur laquelle il faut bâtir, elles supposent qu'on est en possession déjà de ces concepts, et que l'on entend ce que parler veut dire en attribuant au point o dimensions, à la ligne 1, etc., et cela implique aussi que l'on comprend que la ligne soit un lieu géométrique de points, la surface et le solide des lieux géométriques de lignes et de surfaces.

Pour acquérir réellement ces concepts, il ne faut pas suivre, régulièrement, cette marche synthétique du point à la ligne, à la surface et au solide, mais la marche analytique inverse, en partant du solide comme de quelque chose d'immédiatement donné, en considérant la surface comme limite du solide, etc. : cette marche, d'ailleurs, n'était pas inconnue des anciens, comme on peut le voir à une autre série de définitions (XI, 2, I, 6 et I, 3) qui, sans constituer chez Euclide des définitions nouvelles de la surface, de la ligne et du point, indiquent simplement comment solide, surface et ligne sont délimités.

J'ai déjà remarqué, en passant, que ce n'est pas dans les définitions, mais seulement dans les postulats en y joignant l'un des axiomes, qu'il faut chercher l'explication de ce qu'est une *ligne droite*. L'existence de la *ligne circulaire*, également, n'est établie que dans les postulats, tandis que la définition, qui leur est antérieure (I, 15) paraît trop en dire sur ses propriétés : cette définition, en effet, non seulement nous apprend que tous les points de la ligne circulaire sont à la même dis-

tance du centre, mais indique en outre que le cercle lui-même est une figure, c'est-à-dire une portion de plan limitée par la ligne circulaire, — et que le centre est situé à l'intérieur de cette ligne. S'il n'est donc pas dit que la ligne circulaire doit comprendre tous les points jouissant de la propriété mentionnée tout d'abord, toujours est-il que la première des indications offre un moyen précieux de distinguer entre la ligne entière et l'arc de cercle, et c'est par là qu'elle mérite de conserver sa place parmi les définitions. Nous verrons, au reste, que si ces données n'avaient point trouvé place ici, il eût fallu les comprendre parmi les postulats, sous une forme ou sous une autre.

Au contraire, la définition du diamètre du cercle (I, 17) contient une addition qui est sûrement superflue, et pour la définition, et, de plus, en tant qu'hypothèse, puisqu'il y est dit, non seulement que le diamètre passe par le centre, mais encore qu'il partage le cercle en deux parties égales : or ce dernier point est une proposition qui se démontre par la congruence des deux parties en lesquelles le cercle est divisé ; mais, peut-être aussi, un éditeur postérieur l'a-t-il intercalée dans la définition, parce qu'elle ne se trouve effectivement dans aucun théorème d'Euclide.

La définition de l'*angle*, par Euclide, est presque aussi vide en soi que la définition de la ligne droite. Il y est toutefois suppléé par les axiomes qui établissent à quels critéria l'on reconnaît qu'une quantité géométrique est égale, supérieure, ou inférieure à une autre de même espèce : en effet, ces critéria sont également applicables aux angles et, comme on sait en outre que des angles peuvent être additionnés, ils acquièrent ainsi des grandeurs bien définies (cf., p. 104); remarquons, du reste, que la définition primitive de l'angle est encore valable tout aussi bien pour l'angle formé par des lignes courbes. On utilise cette notion, III, 16, pour montrer que la perpendiculaire au diamètre, en un point de la circonférence, forme avec le cercle un angle moindre (ou se rapproche plus du cercle) que toute autre ligne droite.

Les *postulats* que pose Euclide dans le premier Livre sont

les suivants, d'après la plus récente et la plus sûre revision du texte (¹) :

1. Mener une ligne droite entre deux points.
2. Prolonger de façon illimitée une ligne droite limitée.
3. Décrire un cercle de centre donné et de rayon donné.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une ligne droite, qui en coupe deux autres, forme du même côté des angles internes dont la somme soit moindre que deux droits, les deux dernières lignes citées se couperont, sur leurs prolongements, du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits.

Les constructions qui doivent servir à composer toutes les autres, d'après ces postulats, sont celles qu'on exécute pratiquement avec la règle et le compas, mais on se tromperait cependant si l'on voulait envisager les postulats à cet unique point de vue : entre autres faits, les deux derniers postulats ne seraient point alors à leur vraie place, et c'est la raison même qui, de très bonne heure déjà, fit commettre à des éditeurs la faute qui consiste à ranger ces postulats parmi les axiomes.

Comme on le voit, nulle mention n'est faite de la règle et du compas : on ne donnerait, du reste, même avec ces instruments, qu'une image incomplète de la ligne droite et du cercle mathématiques.

Les trois premiers postulats eux-mêmes — ce que nous avons déjà dit en général touchant les hypothèses d'Euclide — ne donnent absolument aucune explication sur la question de savoir d'où et par quels moyens on établit ce qu'on a voulu supposer. Les problèmes des anciens sont, en substance, des propositions sur l'existence, et leurs solutions des démonstrations de l'existence de ce qu'ils traitent ou de ce qu'ils cherchent : de même, les postulats sont des *affirmations de l'existence* de ce qu'on veut faire admettre, sans démonstration ni preuve. Les affirmations contenues dans les trois premiers postulats veulent donc simplement dire qu'une

---

(¹) *Euclidis Elementa;* edidit et latine interpretatus est J.-L. HEIBERG Lipsiæ. 1883-88, 8°.

ligne droite est possible par deux points quelconques donnés, que cette droite peut se prolonger indéfiniment, et qu'il existe un cercle possible, étant donnés un centre et un rayon quelconques ou, en d'autres termes, qu'il y a un cercle de centre donné et passant par un point donné.

En réalité, le troisième postulat doit être entendu de cette façon, et il n'exige en aucune sorte que l'on concède sans démonstration l'existence d'un cercle de centre donné et de rayon donné en un autre lieu du plan : on le voit tout de suite à ce qu'Euclide, dans la deuxième proposition, montre que la détermination d'un tel cercle peut se faire, avec les constructions admises par les postulats, à l'aide de la construction d'un triangle équilatéral exposée dans la première proposition. Par la restriction ici sous-entendue, Euclide n'a fait que se conformer au devoir *de n'émettre pas trop d'hypothèses* : s'il n'eût été question que d'exécution pratique au moyen du compas, la position du rayon donné eût été indifférente, et l'on peut affirmer que la méthode indiquée dans la deuxième proposition n'avait point pour but l'exécution pratique des tracés.

Avec cette conception du sens des postulats, il est évident qu'il ne suffit pas d'admettre l'existence des lignes droites et des cercles le plus simplement déterminés; on exécute les constructions géométriques en déterminant, au moyen de l'intersection de différentes lignes, des points qui pourront servir ultérieurement à la détermination de nouvelles lignes : il faut alors admettre l'existence des points d'intersection aussi bien que celle des lignes, car elle ne saurait être une conséquence de ces dernières. C'est pourquoi le cinquième postulat établit expressément, en hypothèse nouvelle, que deux lignes droites se coupent : pour que cette affirmation soit réellement vraie l'on doit faire toutefois une restriction nécessaire — restriction qui joue ici le même rôle que celui du diorisme pour un problème. Si le point d'intersection n'était pas posé comme existant en vertu du cinquième postulat, les solutions des problèmes où l'on se sert de points d'intersection de lignes droites n'auraient absolument pas fourni les démonstrations de l'existence des figures construites, démonstrations qui devaient être le résultat essentiel des constructions.

Si cette considération est juste, on regrettera qu'il n'y ait pas de postulats pour reconnaître aussi bien l'existence des points d'intersection de la ligne droite et du cercle, ou de deux cercles : sans nul doute, la délimitation parfaite des cas où l'intersection a lieu, réellement, exige déjà le développement de plusieurs propositions, et c'est peut-être parce qu'Euclide ne peut tout de suite faire cette délimitation, avec toute la généralité requise, qu'il s'est abstenu d'établir les postulats en question; toutefois, pour que l'emploi du cercle aux constructions soit possible, d'une façon générale, certaines hypothèses sur son intersection avec la ligne droite et avec d'autres cercles sont au moins nécessaires. Quelles sont les hypothèses dont se sert Euclide? c'est ce qu'il nous faut chercher dans les applications qu'il en fait.

On voit, en effet (proposition I, 12), que, pour s'assurer qu'un cercle de centre donné coupe une certaine droite, il fait passer ce cercle par un point situé du côté de la droite opposé au centre, et qu'il considère (propos. 1) comme évident que deux cercles, ayant chacun son centre sur la circonférence de l'autre, se coupent en deux points; de même encore (propos. 22) qu'un cercle, qui passe à la fois par un point intérieur et par un point extérieur à la circonférence d'un autre cercle, coupe cet autre cercle. Il ressort bien des passages en question qu'il s'appuie sur ces hypothèses : ailleurs, il n'avance rien touchant l'intersection d'un cercle avec une droite, ou avec un cercle, sans avoir préalablement démontré l'existence de cette intersection.

Les hypothèses expressément instituées par Euclide ne renferment-elles donc absolument rien sur les hypothèses dont il se sert, en fait, dans les passages cités, et notamment propos. 12, et cela d'une manière qui montre assez qu'il en dut avoir conscience? Les postulats, du moins, non; mais, comme nous l'avons vu, les différences entre postulats et définitions ne sont pas si tranchées qu'il faille s'en tenir à l'examen des premiers seulement. Alors il est clair qu'Euclide peut justifier l'usage qu'il fait de ces hypothèses par ce qu'il a dit dans les définitions, à savoir qu'un cercle est une figure qui enferme le centre, d'où il découle qu'une ligne circulaire coupera une ligne droite suffisamment prolongée en deux points, si elle a

toutefois son centre d'un côté de cette ligne et passe par un point qui soit situé de l'autre côté; et qu'elle coupera également une autre ligne circulaire, si elle joint un point interne à un point externe. Remarquons, du reste, qu'on peut, en certains cas, démontrer d'une pareille manière l'intersection des lignes droites sans recourir au cinquième postulat, en considérant que les périmètres des polygones délimitent aussi des surfaces dont l'étendue n'est pas infinie : Euclide emploie ce procédé (I, 21).

Reste à expliquer comment l'affirmation que tous les angles droits sont égaux a pu prendre place parmi les postulats.

Il ressort des axiomes que tous les angles sont égaux s'ils sont congruents, sinon, non; et l'affirmation est ainsi exactement la même que cette autre : tous les angles droits sont congruents. Un angle droit étant alors défini (déf. 10) comme celui qui est égal à son angle voisin, le postulat a pour but d'établir que l'angle formé par une droite et son prolongement est d'une grandeur déterminée, ou que le prolongement d'une ligne droite donnée, au delà de l'une de ses extrémités, est déterminé univoquement. C'est bien là ce qu'Euclide a voulu dire, et l'on en acquiert la certitude quand on voit que, en fait, le postulat est précisément appliqué de cette manière : ce qui a lieu dans la démonstration de la proposition I, 14.

Le quatrième postulat est donc un complément du deuxième, à savoir que la détermination du prolongement d'une ligne droite, contenue dans ce dernier, est univoque, et c'est précisément pour cela qu'il a pris place parmi les postulats, et non parmi les axiomes.

Au reste, un lecteur moderne ne regretterait point l'absence d'un tel postulat, habitué qu'il est à tenir compte du nombre des solutions, et il penserait immédiatement, par conséquent, que l'*univocité* est déjà sous-entendue par le deuxième postulat; mais, enfin, puisque ce quatrième existe, c'est l'absence d'un autre qu'il faut regretter, venant exprimer que la détermination d'une ligne droite donnée dans le premier postulat est univoque, elle aussi. Euclide fait expressément usage de cette *univocité* dans la proposition I, 4 où, pour sa démonstration, il se sert de l'argument « que deux lignes droites ne peuvent enfermer de surface »; or cette affirmation coïn-

cide absolument avec celle-ci : que le premier postulat est univoque, et elle ne se trouve point parmi les hypothèses établies. Il y a là, à n'en pas douter, une inconséquence que l'on avait déjà remarquée dans l'antiquité, et elle est cause que des éditeurs ont admis l'hypothèse nettement employée I, 4, soit parmi les postulats, auxquels elle appartient au même titre que le postulat I, 4, soit, plus tard, parmi les axiomes : ce nouveau postulat exprime en outre que la détermination d'un point comme point d'intersection de deux droites, au moyen du cinquième postulat, est univoque.

En revanche, l'*univocité* du troisième postulat, sur la détermination d'un cercle au moyen du centre et du rayon, n'a pas besoin d'être supposée : là, on peut, en effet, recourir de nouveau à ce fait que, déjà, dans les définitions, le cercle est déterminé d'une manière plus complète que la ligne droite; Euclide est à même, de la sorte, de démontrer dans les propositions III, 5 et 6, que des cercles concentriques ne peuvent ni se couper ni se toucher, qu'ainsi le lieu géométrique complet des points situés à égale distance d'un point donné consiste uniquement en *une* courbe fermée ou, en d'autres termes, que le troisième postulat ne donne qu'un cercle.

Les premier, deuxième, quatrième et cinquième postulats d'Euclide, complétés par l'hypothèse employée proposition I, 4, et d'après laquelle le premier postulat doit donner une détermination univoque; complétés encore, comme nous le verrons, par une hypothèse contenue dans le septième axiome, expriment alors toutes les propriétés sur lesquelles se fonde l'emploi de la ligne droite en géométrie. A son insu, nous le verrons, et sans s'en être rendu compte lui-même, Euclide s'en servit simultanément pour établir les propriétés fondamentales du plan.

La définition expresse du plan (I, 7) est, en soi, aussi insignifiante que celle de la ligne droite : le plan est encore mentionné dans les définitions I, 8 et 15, où il est dit que les côtés d'un angle doivent être situés dans le même plan, et que le cercle est une figure plane; or, ce que supposent tacitement les postulats posés est plus important, à savoir que les diverses déterminations ont lieu dans un seul et même plan. Sans cela, le cinquième postulat serait absolument dénué de sens.

La propriété attribuée au plan, notamment par le premier et le deuxième postulat, est celle en vertu de laquelle il contient totalement, avec ses prolongements jusqu'à l'infini, toute droite qui passe par deux de ses points. Si Euclide avait expressément établi lui-même cette propriété, il y eût pu trouver une base réelle pour les trois premières propositions du onzième Livre disant qu'une ligne droite située en partie dans un plan n'en peut sortir, que deux lignes droites qui se coupent sont situées dans un plan (et le déterminent), et que la ligne d'intersection de deux plans est une droite; au contraire, il donne d'autres démonstrations, parmi lesquelles celles du Livre XI, 1, suppose nécessairement la justesse du théorème du Livre XI, 2, lequel, inversement, repose à son tour sur XI, 1.

Sous le rapport logique, tant en principes qu'en forme, la stéréométrie d'Euclide est traitée en général d'une manière bien inférieure à sa géométrie plane : nous en aurons une preuve plus importante encore à propos de ses axiomes, mais, malgré ce défaut, on verra cependant que les mathématiciens grecs connaissaient dans une très large mesure les théorèmes et les opérations stéréométriques.

Tandis que pour les définitions et les postulats nous avons dû, afin de nous faire une idée exacte des hypothèses, recourir en partie aux applications qu'Euclide en a faites dans ses théorèmes, ceux des *axiomes* du premier Livre, d'autre part, dont on considère l'authenticité comme indubitable et dont, pour cette raison, nous voulons exclusivement nous occuper, à savoir les axiomes 1-3 et 7-8 ([1]), donnent une idée aussi brève que claire du fondement et de l'application des notions d'égalité et d'inégalité aux quantités, en général, et aux grandeurs géométriques en particulier.

La première contribution à la notion d'égalité est fournie par l'axiome premier : des grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles, et l'intervention du mot *égal* dans l'explication de l'idée d'égalité n'enlève point toute sa valeur à cette explication, ce que l'on reconnaît, notamment,

([1]) *Euclidis Elementa*. Ed. HEIBERG. Lipsiæ. 1883-88.

à ce qu'on ne peut, dans l'explication que contient l'axiome, substituer le mot *inégal* au mot *égal*. Elle ne suffit pas, toutefois, à donner une notion utilisable des grandeurs, car il faut y ajouter qu'une quantité ne change pas si on la divise et si, ensuite, l'on en recompose toutes les parties : c'est la matière des axiomes 2 et 3, qui affirment qu'égal, également augmenté ou diminué, donne égal. Mais il faut, de plus, comprendre encore, pour pouvoir aussi considérer l'inégalité, qu'on obtient quelque chose de moindre si, dans la recomposition, on ne prend pas toutes les parties, et c'est ce que dit précisément l'axiome 8 : le tout est plus grand qu'une partie.

Les mêmes axiomes donnent aussi une explication de l'addition et de la soustraction des grandeurs, en général; ils impliquent, en outre, que l'ordre des termes de la somme est indifférent.

Quand une arithmétique moderne (¹) définit l'idée de grandeur comme il suit : on dit des propriétés des objets qui ne changent pas si l'on en assemble les parties dans un ordre différent, mais qui changent si l'on en enlève des parties, qu'elles possèdent une grandeur; cette définition est parfaitement d'accord avec les axiomes cités, présentant même l'avantage d'élucider un peu plus directement ce que c'est qu'égal, plus grand, ou moindre.

Cette idée générale de grandeur doit se compléter avec des caractères particuliers qui en rendent l'application possible à des espèces déterminées de grandeurs, comme grandeurs géométriques, poids, etc., ainsi qu'à des quantités numériques purement abstraites; Euclide, pour qui la grandeur géométrique est une quantité abstraite, puisqu'elle lui sert en Algèbre géométrique à représenter des quantités de toutes espèces, même numériques, doit donner tout d'abord le caractère de l'égalité des quantités géométriques : c'est ce qu'il fait dans le septième axiome du premier Livre, dont nous allons parler tout de suite, et ce n'est qu'au cinquième Livre qu'il donnera une représentation immédiate des quantités ab-

(¹) JULIUS PETERSEN, *Arithmetik og Algebra til Skolebrug*. Kæbenhavn, 1879, p. 5.

straites, comme *rapports*, ainsi que les caractères de leur égalité et de leur inégalité.

Les rapports à l'unité sont des nombres, dans l'acception moderne et générale du mot, mais l'unité n'apparaît qu'au septième Livre et n'y est employée qu'à titre de mesure pour les quantités commensurables; aussi discuterons-nous les hypothèses faites à cet égard en nous occupant spécialement plus tard de ces Livres.

Après ces quelques remarques sur divers procédés d'estimation des grandeurs, il nous faut revenir à l'estimation géométrique que l'on trouve au septième axiome du premier Livre : il y est énoncé que les quantités congruentes, c'est-à-dire celles qui se peuvent superposer, sont égales, caractère d'égalité géométrique précédant très naturellement celui de l'inégalité, renfermé dans le huitième axiome, et qui ne nécessite aucun supplément particulièrement relatif aux quantités géométriques. Par le septième axiome, Euclide marque de la façon la plus formelle quel doit être le point de départ de toute recherche sur la grandeur géométrique : déjà, dans la pratique, on prend ce point de départ en comptant le nombre de parties de la grandeur à mesurer qui, toutes, sont congruentes avec la mesure; on le retrouve ensuite dans le corps de doctrine d'Euclide, comme dans tous les suivants, où l'on traite des quantités géométriques. Égales sont en première ligne les quantités congruentes, inégales deux quantités dont l'une n'est qu'une partie de l'autre ou congruente à cette partie.

Euclide emploie ce même procédé dans le premier Livre pour montrer comment les égalités et les inégalités de côtés et d'angles d'un même triangle, ou de triangles différents, s'entraînent mutuellement, et les résultats qu'il en déduit sont ensuite combinés avec les hypothèses générales sur les grandeurs; il s'applique encore à employer aussi peu que possible le principe géométrique et spécifique de la congruence : aussi, dans I, 26, ne tire-t-il pas immédiatement parti de la congruence pour démontrer que des triangles sont égaux suivant toutes leurs parties si seulement un côté et les deux angles adjacents sont donnés égaux, mais il le conclut par antithèse des cas de congruences antérieures.

Pour les lignes droites et les angles, l'égalité est identique

à la congruence ; mais, pour les lignes brisées, les portions de surfaces planes et d'espace, l'égalité peut exister aussi sans la congruence : pour démontrer l'égalité, il suffit alors de combiner les parties congruentes, conformément aux hypothèses générales sur les grandeurs. On trouve le premier exemple de ce fait chez Euclide, I, 35, lorsqu'il démontre que des parallélogrammes de même base et de même hauteur ont la même surface.

Ce n'est cependant que par passage aux limites que l'on pourra parvenir aux grandeurs des lignes et surfaces courbes, à celles des surfaces planes limitées par des courbes, aussi bien qu'à celles de la plupart des portions d'espace ; elles ont été recherchées dans l'antiquité par la méthode d'exhaustion et exigent, en partie, l'introduction de nouvelles hypothèses : c'est ce que nous verrons lorsque nous parviendrons au douzième Livre d'Euclide, ou bien en discutant aussi les travaux d'Archimède.

En revanche, nous devons dire tout de suite que la façon dont Euclide emploie, en Stéréométrie, l'axiome de congruence qu'il a posé dans le septième axiome, est affectée d'une lacune très importante : cette lacune tient à ce que, dans sa Stéréométrie, aucune distinction n'est faite entre *congruence* et *symétrie*, mais il est visible, toutefois, qu'Euclide ne tient pas pour congruentes les figures symétriques, car, en ce cas, il eût cru posséder dans le septième axiome une base suffisante pour les déterminations de volumes. Au lieu de cela, il établit une nouvelle hypothèse qui puisse convenir aussi bien aux figures congruentes qu'aux figures symétriques : dans la dixième définition du onzième Livre, sont *définies égales* et *semblables* les figures d'espace qui sont *limitées* par le même nombre de figures planes égales et semblables (c'est-à-dire congruentes). Cette définition contient — outre une nomenclature — une hypothèse géométrique, donc un axiome, à savoir que ces figures doivent être aussi égales en volumes ([1]), et cet axiome sert, Liv. XI, 29 pour démontrer que des parallélépipèdes de même base et de

([1]) Cauchy a démontré que des figures de cette sorte sont en réalité toujours congruentes ou symétriques.

même hauteur ont des volumes égaux; en outre, on peut en conclure (Liv. XI, 28) que les deux prismes trilatères dont se compose un parallélépipède ont des volumes égaux; or on sait que les prismes que l'on déplace dans la première démonstration sont congruents, et que les prismes trilatères de la dernière proposition peuvent se changer en prismes congruents par déplacement de leurs parties. Euclide, cependant, n'en a point fait la remarque, car l'introduction d'un nouveau principe pour l'égalité des solides eût alors été superflue et, par conséquent, contraire au procédé euclidien ordinaire.

Le septième axiome n'a été, pour l'emploi que nous venons d'indiquer ici, qu'un signe d'égalité géométrique ou, si l'on veut, une définition de cette égalité; mais il recèle, en tous cas, une véritable hypothèse géométrique ou un axiome d'importance très essentielle, axiome exprimant qu'il peut être question, en réalité, de figures congruentes, c'est-à-dire de déplacement de figures en d'autres endroits de l'espace. D'après l'axiome d'Euclide, ce sont les *grandeurs* géométriques qui déterminent tout ce qui demeure invariable durant un tel transport, mais ce en quoi consistera la transposition n'est nullement caractérisé; l'axiome même n'en parle aucunement, et les applications montrent que l'on pensait à la transposition empirique, comme d'après les solides physiques dits *invariables*.

Quand nous avons dit, précédemment, que l'axiome I, 7 est nécessaire pour caractériser parfaitement une ligne droite, nous avions précisément à la pensée l'hypothèse dont se sert Euclide, par exemple dans la démonstration des théorèmes de congruence, et d'après laquelle la transposition ne change point une ligne droite.

15. — Note sur les hypothèses de la Géométrie.

Si l'on combine la dernière propriété mentionnée de la ligne droite avec celles déjà exprimées dans les postulats, y compris son « univocité » de détermination par deux points, la ligne droite se définit alors celle qui, en son entière étendue, coïncide avec une autre ligne droite quand on la transporte de manière que deux de ses points coïncident

avec deux points de la seconde droite. Cette définition ne contient point de cercle vicieux, encore que la ligne droite se détermine par superposition à une autre ligne droite : on le reconnaît à ce fait qu'aucune autre ligne ne possède cette propriété; seulement, la possibilité d'une transposition est admise comme une hypothèse. Enfin, d'après cette définition, on a la ligne droite comme lieu géométrique des points fixes d'un corps qui est en rotation tandis que deux de ses points restent fixes, et l'on peut encore en faire dériver la construction des lignes droites au moyen de la règle.

Sans doute, cette définition ne se trouve pas énoncée formellement dans Euclide, mais elle résulte cependant des propriétés, toutes ensemble, dont il se sert en fait, et qu'il établit successivement en postulats et en axiomes : ces mêmes hypothèses font du plan une surface qui contient entièrement toute droite passant par deux de ses points. C'est là plus, il est vrai, qu'une bonne définition ne doit contenir, car ce n'est déterminer le plan ni comme lieu géométrique d'un nombre simplement infini de lignes, ni comme lieu géométrique d'un nombre doublement infini de points, mais on peut, toutefois, décomposer cette détermination en une définition et en un axiome, ou postulat : il faut alors définir le plan comme le lieu des droites qui joignent un point fixe aux points d'une droite fixe, puis ajouter, à titre de supposition indémontrable, mais nécessaire cependant à l'édifice géométrique, que cette surface possède alors la propriété générale ci-dessus.

Et l'on ne se tire nullement de cette difficulté en définissant le plan, comme on l'a fait : lieu géométrique des points à égale distance de deux points fixes. Il peut se faire qu'on démontre, en Stéréométrie, que le plan ainsi défini renferme effectivement toute droite dont il contient deux points, mais cela ne se peut qu'en se fondant sur la géométrie plane, où l'on fit déjà cette hypothèse sur le plan, qui contient toutes les figures traitées.

Relativement au plan, on fait encore une hypothèse qui ne découle point de la définition établie ici, à savoir celle contenue dans le cinquième postulat et d'après laquelle, — à part un cas spécialement désigné — deux droites d'un même plan se coupent.

Comme nous l'avons dit (p. 101), Euclide, sans toutefois l'énoncer formellement, fait encore une autre hypothèse géométrique ayant également trait aux figures rectilignes, à savoir qu'une ligne du plan revenant sur elle-même (brisée ou courbe) enferme une superficie finie et qu'elle est coupée au moins en deux points par toute ligne, droite ou revenant sur elle-même, qui joint un point situé extérieurement à un point intérieur : pareilles hypothèses se rattachent à la question des surfaces fermées, mais elles ne peuvent jouer un rôle que si l'on va plus loin qu'Euclide dans cette direction.

Les hypothèses géométriques qu'emploie Euclide sont donc les suivantes : 1° l'axiome concernant le déplacement des figures : 2° et 3° les deux hypothèses citées sur le plan ; 4° l'hypothèse sur les contours (ou surfaces) fermés. Il en indique les points essentiels dans ses définitions, postulats et axiomes, qui contiennent en outre l'explication de la nomenclature employée ainsi que, dans les axiomes 1-3 et 8, les hypothèses exprimées sur la théorie des grandeurs en général. Ces derniers ne donnent pas seulement des explications de mots, mais expriment encore l'hypothèse, nécessaire à l'édification d'une véritable théorie des grandeurs, sur la variabilité et l'invariabilité des grandeurs par un partage, suivi d'une composition de tout ou partie des fragments obtenus de la sorte.

La clarté qu'affectent dans Euclide les hypothèses géométriques les plus importantes a permis que le principe fondamental de la Géométrie posé par ses *Éléments* fût un point de départ excellent pour les investigations modernes sur « la portée des hypothèses particulières et leur réciproque indépendance » : il sera possible, en effet, si elles sont indépendantes les unes des autres, d'en retenir quelques-unes et de celles-là seules tirer des conséquences, en faisant omission des autres. On obtient ainsi une généralisation de la géométrie, car les propositions que l'on démontre alors valent aussi bien pour « l'espace » qui satisfait de plus aux autres hypothèses, que pour les « espaces » qui n'y satisfont point : elles peuvent aussi, dans l'espace défini par les hypothèses d'Euclide, trouver une autre application, grâce à laquelle, par exemple, on remplace les lignes droites par des courbes que l'on va caractériser à l'aide de certaines propriétés de la ligne droite ordinaire, propriétés telles, qu'elles sont spéciales, non seulement aux lignes droites, mais à d'autres lignes encore.

La plus importante de ces généralisations, la *Géométrie projective*, n'est cependant pas née, à proprement parler, de spéculations sur les axiomes : la plupart des propositions de cette Géométrie sont issues, en effet, de généralisations dont la convenance s'est manifestée dans le domaine de la Géométrie fondée sur toutes les hypothèses d'Euclide. En réalité, toutefois, cette Géométrie se dégage de quelques-unes de ces hypothèses, et c'est pourquoi l'on peut, dès le principe, l'édifier sans elles.

En Géométrie projective, on écarte l'axiome sur la transposition (des figures) et la théorie qui en résulte pour les quantités géométriques et, par là même, du moins tant que la Géométrie projective ne se fait pas de la transposition une notion nouvelle qui lui soit propre, et conséquemment des grandeurs, on ne se sert point davantage des idées générales sur les grandeurs, établies par le reste des axiomes d'Euclide ; en revanche, on tient compte des hypothèses contenues dans les postulats, ce pour quoi, cependant, il faut encore mettre là de côté les

emprunts également faits à la théorie des grandeurs. Ainsi, d'abord, disparaît totalement le troisième postulat sur la détermination du cercle, le cercle étant défini par le fait que son rayon doit avoir une grandeur invariable, et, ensuite, disparaissent les restrictions du cinquième postulat, si bien qu'on y substitue le suivant : deux lignes droites du même plan se coupent toujours en un point.

On peut échapper, cependant, à l'antinomie directe avec la Géométrie dans laquelle servent toutes les hypothèses d'Euclide, ou « Géométrie euclidienne », en attribuant aux droites parallèles de cette dernière des points d'intersection situés à l'infini. La Géométrie projective arrive donc à comprendre la Géométrie euclidienne aussi bien que la non euclidienne, mentionnée ultérieurement, grâce à ce fait qu'elle ne s'enquiert pas de la question de savoir si les points d'intersection sont, ou non, infiniment lointains.

La ligne droite, en Géométrie projective, prend les mêmes propriétés qu'en Géométrie euclidienne, à l'exception de la transposition qui fait coïncider une droite avec une autre, et les propriétés du plan s'y rattachent, tout comme chez Euclide, à celles des droites : les deux hypothèses, qui se rattachaient à la détermination du plan, sont conservées. On ne doit plus, cependant, bâtir sur l'axiome de transposition, mais sur ces hypothèses sur le plan, d'où résulte clairement que, pour développer la Géométrie projective d'une manière indépendante, et sans considérer préalablement comme connue la Géométrie euclidienne, il faut nécessairement commencer par des considérations stéréométriques qui permettent de se servir de ces hypothèses. En ce qui concerne l'hypothèse euclidienne sur les contours fermés, elle n'est pas indépendante des hypothèses abandonnées : on ne peut donc pas la conserver en Géométrie projective. Au contraire, dans cette Géométrie, on a deux espèces de lignes fermées dans le plan, dont l'une coupe une droite en un nombre pair de points (ou en aucun), l'autre en un nombre impair.

A l'inverse de la Géométrie projective, la Géométrie dite *non euclidienne* est précisément issue de spéculations sur les hypothèses établies par Euclide, notament sur l'une d'elles, celle que nous avons rencontrée dans le cinquième postulat. Le mieux est, peut-être, pour saisir ces spéculations, de se rappeler que ce postulat prit place, dans la plupart des éditions, entre les axiomes où, par suite d'intercalations d'autres axiomes moins authentiques, il porte le nom de « onzième axiome d'Euclide ». La détermination d'un point comme point d'intersection de deux droites, tant qu'on la trouva parmi les postulats, constituait un pendant naturel à la détermination d'une droite par deux points; au contraire, le renvoi de la même hypothèse aux axiomes correspondant aux théorèmes, devait tirer particulièrement l'attention sur la délimitation qui s'y rattache.

L'axiome dans lequel deux droites, dont les angles internes du même côté d'une troisième, qui les coupe, forment une somme moindre que deux droits, se rencontrent de ce côté, devenait alors le pendant du théorème d'après lequel deux droites sont parallèles quand leur somme équivaut à deux droits : Euclide démontre ce dernier théorème, I, 27 et 16, à l'aide des autres hypothèses; le onzième axiome, et l'important théorème qui en dépend sur la somme des angles d'un triangle, ne peuvent-ils alors se démontrer aussi?

Cette question a provoqué au cours des temps d'innombrables essais de démonstrations : quelques-uns, sans doute, étaient justifiables jusqu'à un certain point, et cela dans la mesure qu'ils ne font que substituer à celle d'Euclide d'autres hypothèses, dont la justesse pouvait dès l'abord se concéder aussi bien : seulement, on n'a pas toujours, comme le fait Euclide, exprimé et avoué soi-même qu'on faisait une hypothèse. Pour l'axiome euclidien que nous mentionnons ici, et pour les théorèmes connexes, qu'une ligne droite est déterminée univoquement quand elle passe par un point et est parallèle à une droite donnée, ou « que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits », nous citerons des preuves, des démonstrations qui ont pénétré dans de bons traités de notre époque ou de l'époque immédiatement précédente. Parmi elles, celles que nous numérotons 2 et 3 sont dues au mathématicien français Legendre.

1. On se contente de faire sauter aux yeux l'évidence de l'axiome, et de persuader aux lecteurs de l'admettre au même titre que les hypothèses géométriques antérieures.

2. On peut rattacher le théorème « que deux angles d'un triangle déterminent le troisième » à la détermination du triangle au moyen d'un côté et des deux angles adjacents. La grandeur d'un côté unique ne peut en effet déterminer que l'échelle de la figure tracée, donc ne peut avoir aucune influence sur la forme du triangle, conséquemment sur les angles non plus : les deux angles donnés déterminent donc le troisième. Comme on le voit, la démonstration se fait en posant, en hypothèse géométrique, l'idée de similitude, ou l'idée d'une forme indépendante de l'échelle, hypothèse sur laquelle on s'appuiera : ce que l'on fait là répond absolument à ce qu'a fait Euclide, lui-même, en posant la congruence en principe géométrique des grandeurs, dans son axiome des transpositions.

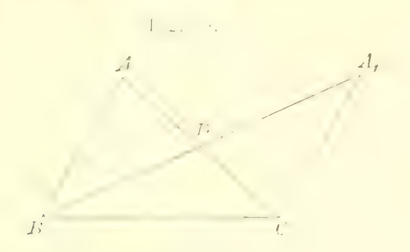
3. D'autres ne se contentent pas, comme Euclide, de déterminer la grandeur d'un angle à l'aide du principe de transposition, mais ils font de la grandeur d'un angle le rapport entre la portion de surface infinie comprise par les branches de l'angle, et la surface du plan entier : si l'on pouvait donc mener par un point deux parallèles à une droite donnée, alors le demi-plan entier segmenté par cette dernière droite, demi-plan

égal à deux droits, ne constituerait qu'une partie d'un des quatre angles formés par les deux premières droites, et dont chacun est moindre que deux droits. On voit facilement ici que la nouvelle hypothèse réside dans la définition de l'angle, et aboutit à affirmer que le rapport établi dans cette définition, entre deux quantités infinies, a une valeur déterminée.

4. D'autres, encore, démontrent que la somme des angles extérieurs d'un polygone est égale à quatre droits en faisant tourner une droite successivement autour des sommets des angles, depuis l'un des côtés adjacents, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec l'autre : quand cette droite revient à sa position primitive, elle doit avoir tourné, en tout, le même compte que si elle était revenue à sa position primitive en tournant autour d'un point fixe. Là, aussi, on ne s'en est pas tenu à caractériser l'angle en tant que grandeur selon le principe des *transpositions* d'Euclide, mais on a bien plutôt défini l'angle comme partie d'une révolution entière; or cela implique l'hypothèse que cette partie a une grandeur, grandeur de telle nature que rien ne lui importe, soit qu'on accomplisse une révolution entière, autour d'un point unique, soit que l'on décompose cette révolution en révolutions partielles, autour de points différents. Que l'on fasse bien là, en réalité, une hypothèse particulièrement valable pour le plan, tout comme l'axiome d'Euclide, on le voit aisément si l'on veut remplacer le plan par une surface sphérique, et les droites par des arcs de grands cercles : alors, en effet, l'hypothèse cesse d'être juste.

5. Un essai de Legendre, qui se rattache vraiment aux autres hypothèses d'Euclide, est toutefois de plus grande importance en ce qui concerne le rapport de l'axiome d'Euclide à son système. Sans doute, en s'appuyant sur ces hypothèses, il ne peut démontrer le théorème général sur la somme des angles d'un triangle, mais il réussit cependant à démontrer que *la somme des angles n'est pas plus grande que deux droits :* l'une des voies qui lui permettent d'arriver à ce résultat suit très exactement une des démonstrations propres à Euclide, celle du Liv. I, 16, dans laquelle Euclide montre que l'angle adjacent d'un angle C dans un triangle ABC est plus grand que chacun des deux autres angles, par exemple que A. On le voit en joignant le milieu D de AC avec B, et puis en prenant, sur le prolongement, $DA_1 = BD$; alors le triangle A_1BC a la même somme d'angles que ABC et comprend un angle BCA_1, qui est égal à la somme des angles A et C du triangle primitif : d'où il suit que $A + C < 2$ angles droits, ou que A est plus petit que l'angle supplémentaire de C. Legendre reprend l'opération que nous venons d'employer ici en ayant soin, à chaque fois, que l'angle qui s'appelle B soit le plus petit angle du triangle, que l'on transforme en continuant : le nouveau triangle auquel il parvient alors a constamment la même

somme d'angles et contient un angle, B ou A_1, qui est égal à la moitié du plus petit des angles précédents, ou inférieur à cette moitié. D'après un principe que, plus tard, Euclide pose consciemment à la démonstra-



tion d'exhaustion, on peut enfin aboutir de la sorte à un triangle dans lequel un angle soit moindre qu'une limite quelconque donnée; le théorème d'Euclide montre que la somme des autres angles est plus petite que deux droits et l'on peut alors facilement, avec la démonstration d'exhaustion si l'on veut, prouver que la somme des trois angles, restée invariablement la même que dans le premier triangle donné, ne surpasse pas deux angles droits.

Puisqu'on était allé si loin sans recourir au onzième axiome (le cinquième postulat), c'était une invitation à pousser outre encore. Il fallait s'en tenir au fait, démontré par Legendre, que la somme des angles du triangle pouvait être égale à deux droits, ou inférieure à cette quantité : dans ce dernier cas, on pouvait d'ailleurs démontrer que la somme des angles diminuait en même temps que croissait la surface du triangle. Comme point de départ pour chercher si des lignes droites se coupent, on ne possédait que l'hypothèse sur les contours fermés; mais on parvenait cependant à démontrer que l'intersection d'une droite donnée, avec une droite menée par un point donné, a lieu si cette dernière ligne tombe dans l'un des couples d'angles opposés par le sommet et formés par deux lignes droites déterminées, passant par le point donné. D'autres théorèmes de cette Géométrie, dite *non euclidienne*, qu'ont exposés Lobatschewsky et Bolyai, concordent davantage avec ceux de la Géométrie euclidienne ordinaire.

Nous pouvons encore citer une espèce de Géométrie qui, parmi les hypothèses d'Euclide, utilise exclusivement celles sur les contours fermés, et les hypothèses correspondantes dans l'espace; on l'appelle *Analysis situs*.

Aux investigations géométriques indiquées ici sur les hypothèses de la Géométrie l'on a, de nos jours, rattaché des questions sur leur origine qui relèvent de la *théorie de la connaissance* : les hypothèses sont-elles parfaitement volontaires? reposent-elles sur des idées innées?

ou renferment-elles des vérités que l'on tient de l'expérience? Dans ce dernier cas, il ne serait pas permis de dire que les affirmations contenues dans les hypothèses sont absolument justes, mais seulement que les écarts de ces affirmations sont trop minimes pour être remarqués. Euclide, comme nous l'avons déjà dit, ne répond point à ces questions : il se contente d'établir des hypothèses et de démontrer que, si elles sont valables, tout ce qui en découle l'est aussi; ce sera ensuite l'affaire de celui qui veut utiliser ses résultats de déterminer dans quelle mesure il doit accorder créance auxdites hypothèses.

16. — La Théorie générale des proportions : cinquième et sixième Livre d'Euclide.

Nous avons eu précédemment plusieurs occasions de faire remarquer, dans les premiers Livres d'Euclide, les passages où l'on s'écarte du traitement aujourd'hui en usage : ces différences, autant qu'elles n'étaient pas seulement de pure forme, reposaient principalement sur le fait qu'Euclide, dans ses premiers Livres, doit renoncer à l'emploi des proportions, ce qui fournit des démonstrations fondées sur l'algèbre géométrique, et la raison en était, comme nous l'avons déjà dit, que l'ancienne théorie des proportions n'était assez rigoureuse que dans son application aux quantités commensurables. Eudoxe avait bien remédié à cet inconvénient par une théorie nouvelle et vraiment générale des proportions, mais Euclide ne développe cette théorie que dans son *cinquième Livre :* aussi nous arrêterons-nous à ce Livre afin d'y prendre une connaissance exacte de la théorie des proportions qui, en effet, ne fut pas seulement la pierre angulaire de toutes les Mathématiques anciennes ultérieures, mais qui contient, en outre, le principe de la future théorie générale des grandeurs.

Le mieux sera, pour faire voir la grande importance de ce Livre, de négliger les nombreuses dénominations qu'Euclide affecte aux proportions diversement composées à l'aide d'autres rapports, et de rendre ces formes en signes algébriques modernes : à cette fin, nous désignerons par les premières lettres de l'alphabet $a, b, c, \ldots$ les grandeurs générales qu'Euclide représente par des segments, par $m, n, p, \ldots$ les nombres entiers auxquels il donne de petites valeurs, dans les figures,

selon les cas, et il ressortira de son Livre que sa représentation géométrique offre une assez grande clarté.

Pour ce qui est des nombreuses définitions d'Euclide, nous n'aurons à employer que les trois suivantes :

La défin. 4 dit que deux quantités forment un rapport si les multiples de chacune d'elles peuvent arriver à surpasser l'autre. Cela ne veut pas dire, seulement, que les grandeurs doivent être de même nature de sorte qu'on les puisse comparer, mais cela exprime, en outre, une condition nécessaire qui apparaîtra indispensable, aussi bien pour l'extension de la théorie des proportions aux quantités incommensurables que, plus tard, pour les recherches infinitésimales que l'on trouve exécutées, chez Euclide et chez Archimède, au moyen de cette même démonstration d'exhaustion inventée par Eudoxe.

La défin. 5 dit que

$$a : b = c : d,$$

si toutefois $ma \gtreqless nb$ entraîne avec soi que $mc \gtreqless nd$.

La définition 7 dit que

$$a : b > c : d,$$

si l'on peut attribuer à m et n des valeurs telles que

$$ma > nb, \text{ mais que } mc \leqq nd.$$

Sans doute, la définition 5 n'emploie pas le mot *égal* pour les deux rapports, mais, comme il sera démontré plus tard dans les propositions 11 et 13 que $a : b = c : d$ et $c : d = e : f$ entraînent $a : b = e : f$, il s'agit bien précisément de l'égalité.

Le sens de ces définitions de la grandeur d'un rapport est clair si l'on considère qu'elles sont identiques, en réalité, avec la détermination moderne d'un nombre irrationnel pur à l'aide de valeurs approximatives rationnelles : premièrement, en effet, un nombre pur est le rapport d'une grandeur à une unité de même espèce; deuxièmement, les comparaisons d'Euclide aboutissent bien à des comparaisons entre des rapports et des valeurs approximatives rationnelles $\frac{n}{m}$.

Voyons maintenant comment on peut fonder, sur ces définitions, une exacte théorie des rapports et des proportions :

Dans les propositions 1-3 et 5-6, Euclide avance d'abord les lemmes suivants :

(1 et 5) $$ma \pm mb = m(a \pm b)$$

(2 et 6) $$ma \pm na = (m \pm n)a$$

(3) $$n.ma = nm.a;$$

toutefois, nous rendons ces trois dernières propositions d'une façon assez libre, car, dans 2 par exemple, il est dit que $ma + na$ est le même multiple de a que $mb + nb$ l'est de b; mais les démonstrations — par décomposition des nombres entiers en leurs unités — aussi bien que les applications, s'accordent parfaitement avec les sens que nous indiquons.

Ces lemmes, et la définition 4, servent à faire des propositions suivantes de simples conséquences des définitions 5 et 7 :

si

$$a : b = c : d,$$

on a

(4) $$ma : nb = mc : nd;$$

si

$$a > b,$$

on a, (7 et 8),

$$a : c > b : c,$$

mais

$$c : a < c : b.$$

Si

$$a : b = c : d$$

et si

$$c : d = e : f,$$

alors

(11) $$a : b = e : f,$$

et, avec ces rapports égaux, on en peut former un nouveau aussi grand, à savoir

(12) $$(a + c + e) : (b + d + f);$$

mais si

$$a : b = c : d$$

avec

$$c : d > e : f,$$

alors

(13) $$a : b > e : f.$$

Pour donner un exemple de démonstration, considérons la proposition 8, dans laquelle, si $a > b$, on demande de déterminer deux nombres entiers m et n, tels que $ma > nc \geqq mb$; on y parviendra en changeant ces conditions dans les suivantes qui, d'après la définition 4, peuvent être remplies :

$$mb > c \quad \text{et} \quad m(a - b) > c,$$

$$(n - 1)c \leqq mb < nc;$$

d'où il suit que

$$nc < ma.$$

Les propositions 9 et 10, qui sont les inverses de 7 et 8, se démontrent par antithèse.

Dans 14, on établit à l'aide des propositions précédentes que, si

$$a : b = c : d,$$

$$a \gtreqless c \text{ entraîne } b \gtreqless d.$$

Dans 15, on démontre, à l'aide de 12, que

$$ma : mb = a : b.$$

Les propositions 16-19 contiennent des transformations de la proportion

$$a : b = c : d;$$

on en tire

(16) $$a : c = b : d,$$

(17) $$(a - b) : b = (c - d) : d,$$

(18) $$(a + b) : b = (c + d) : d,$$

(19) $$a : b = (a - c) : (b - d).$$

On démontre 16 et 17 à l'aide de la définition 5; en outre, pour 16, on se sert des deux propositions précédentes; dans

la proposition 17, on déduit de la proportion donnée que, pour toutes les valeurs de m et de n,

$$mc > (m - n)d$$

résulte de

$$ma > (m - n)b;$$

d'où il suit que

$$m(a - b) > nb$$

entraîne avec soi

$$m(c - d) > nd.$$

18 et 19 se tirent (le premier antithétiquement) de 16 et de 17.

Il y a toutefois une transformation qui manque : c'est celle en

$$b : a = d : c.$$

Or, comme elle est expressément employée dans la démonstration de 20, on a voulu la chercher dans un corollaire à la proposition 7; mais il serait difficile de l'y trouver, car il ne s'agit, dans 7, que du cas où $b = d$, et c'est pourquoi quelques éditeurs transportent ce corollaire à la proposition 4. Quoi qu'il en soit, la transformation en question découle directement de la définition 5.

Les propositions 20-23 renferment l'importante théorie des rapports composés. D'après 22, si

$$a : b = d : e \quad \text{et si} \quad b : c = e : f,$$

il en résulte

$$a : c = d : f.$$

Comme préambule à la démonstration, il est établi dans 20 que, d'après les hypothèses, la condition $a \gtreqless c$, d'où, selon 8, il résulte que $d : e = a : b \gtreqless c : b = f : e$, que cette condition, dis-je, comporte avec elle, selon 9 et 10, $d \gtreqless f$. Maintenant, selon 4, comme les proportions données sont transformables en

$$ma : nb = md : ne$$

et en

$$nb : pc = ne : pf.$$

il résultera également de

$$ma > pe \quad \text{que} \quad mf > pf.$$

On démontre de la même manière la proposition 23, en partant de 21 :

$$a : b = e : f \quad \text{et} \quad b : c = d : e,$$

entraînent

$$a : c = d : f.$$

Ces propositions énoncent que le rapport $a : c$ est composé des rapports $a : b$ et $b : c$; mais si nous considérons le rapport antique comme un nombre moderne, on trouve que le rapport, composé des deux rapports, est précisément ce qu'on appelle maintenant un *produit*. Et si l'on donne des formes déterminées aux rapports qu'il s'agit de composer, le dernier terme de l'un devant être le premier terme de l'autre, cela ne restreint toutefois nullement leur composition : il résulte, en effet, de la représentation géométrique du Livre VI, 12, que tout rapport peut être transformé de manière qu'un de ses deux termes ait une valeur donnée; dans le Livre VI, 23, où il est démontré que le rapport entre deux parallélogrammes d'angles égaux est composé des rapports des côtés, on voit aussi que l'on donne à ces derniers les formes $a : b$ et $b : c$ pour les faire entrer en composition.

Grâce à cet emprunt au VIe Livre, les propositions 22 et 23 du Ve renferment les démonstrations complètes des affirmations que l'on exprimerait aujourd'hui de la manière suivante : *Un produit est déterminé par ses facteurs, et l'ordre des facteurs est indifférent.*

Indépendamment de la rationalité ou de l'irrationalité des facteurs, les anciens possédaient donc deux représentations distinctes de ce que nous nommons leur *produit*, à savoir : celle que nous venons d'exposer et, en second lieu, la représentation par les rectangles dont on se servait en algèbre géométrique. En réalité, ces deux modes expriment essentiellement la même chose : on le voit par la proposition 23 du Livre VI qui vient d'être citée.

La représentation en rapports composés, qui est moins

simple, offre, par ailleurs, un avantage essentiel : tandis que, normalement, l'algèbre géométrique ne traite que les produits de deux facteurs représentés comme rectangles, et qu'il faut avoir recours à l'espace pour figurer les produits de trois facteurs sous forme de parallélépipèdes, on peut, au contraire, représenter le produit d'un nombre arbitraire de facteurs par le rapport composé de ces facteurs. En effet, si l'on donne aux facteurs les formes

$$a:b, \quad b:c, \quad c:d, \quad d:e,$$

le produit composé de ces facteurs est $a:e$: c'est ce que dit expressément la proposition 22.

D'ailleurs, dans la transformation du problème de la duplication du cube par la détermination de deux moyennes proportionnelles, nous eûmes un exemple déjà de l'emploi général que faisaient les Grecs des rapports composés : ainsi, la proportion prolongée

$$a:x=x:y=y:b$$

exprime donc, chez les anciens, absolument la même chose que ce que nous écririons

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{x}\right)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a}=\left(\frac{x}{a}\right)^3.$$

On représente de la même manière des puissances encore plus élevées, par le premier et le dernier terme d'une proportion prolongée, c'est-à-dire telle que ses termes forment une progression géométrique.

Même au temps d'Euclide on était, sous ce rapport, plus avancé que son cinquième Livre ne le laisse entendre ; on le voit, notamment, par son Livre IX, 35, où il donne une détermination de la somme des termes d'une progression géométrique, et, actuellement, on pourrait rendre l'investigation contenue dans cette proposition de la manière suivante : si

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d},$$

alors

$$\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{b}=\frac{d-c}{c}=\frac{d-a}{a+b+c}.$$

Mais la proposition ne porte pas uniquement sur la somme de trois termes consécutifs dont se contente Euclide et cette démonstration est générale, ne s'appuyant que sur des propositions du cinquième Livre; cependant Euclide s'y arrête seulement pour le moment parce que, dans la proposition suivante qui concerne la théorie des nombres, il aura à appliquer la proposition :

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

D'ailleurs, nous devons attacher à cette représentation des produits et des puissances d'autant plus d'importance qu'elle est demeurée jusqu'à présent le fondement des études algébriques qui prétendent à la généralité, et non restreintes aux nombres rationnels.

La proposition V, 24, dit que : si

$$a : c = d : f$$

et si

$$b : c = e : f,$$

il s'ensuit alors

$$(a + b) : c = (d + e) : f;$$

cette proposition est presque de même espèce que celles qui précèdent les propositions sur les rapports composés. Cependant elle trouve seulement place ici par la raison que la proposition 22 sert à déduire des deux proportions données, après inversion des rapports dans la deuxième (formation des valeurs réciproques), que

$$a : b = d : e,$$

d'où à l'aide de 18, il résulte que

$$(a + b) : b = (d + e) : e.$$

Une nouvelle composition des rapports (selon 22) conduit alors à ce qu'il fallait démontrer : et la première de ces deux applications de la proposition 22 est intéressante, puisqu'elle montre que la division de rapports n'exige point de nouvelles propositions particulières.

La proposition 25 dit que, si quatre quantités sont proportionnelles, la somme de la plus grande et de la plus petite est

supérieure à la somme des deux autres : on le démontre au moyen de 19. Un cas particulier, dont on ne parle pourtant pas ici, consiste en ce que la moyenne entre deux grandeurs (moyenne arithmétique) est plus grande que leur moyenne proportionnelle (moyenne géométrique) : on le démontre par l'algèbre géométrique (VI, 27) et l'on en tire le diorisme pour les équations du second degré.

Si, malgré son exposition géométrique, la théorie des proportions donnée dans le cinquième Livre est parfaitement générale et applicable à toutes sortes de quantités, elle n'en avait pas moins besoin d'un complément qui, selon la méthode des anciens, fût géométrique. L'existence des rapports résulte des définitions dès que l'on a des quantités susceptibles de former des rapports, selon la définition 4; toutefois, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut en passant, l'existence d'une quantité telle que, jointe à une quantité donnée, elle forme un rapport de valeur donnée, nécessite une démonstration que l'on effectue par construction géométrique d'une quatrième proportionnelle.

Ce complément géométrique des proportions se trouve dans le sixième Livre, qui renferme en outre les plus importantes applications de cette théorie à la géométrie, notamment aux figures semblables, ainsi qu'à sa combinaison avec l'algèbre géométrique; et le but important que l'on atteint, grâce à cette combinaison, est de représenter géométriquement et de résoudre les équations du deuxième degré dans lesquelles x^2 est affecté d'un coefficient : quand ce coefficient a était rationnel, les anciens savaient, il est vrai, comme nous l'avons vu (p. 50), transformer l'équation en une autre d'inconnue ax, sans coefficient du terme carré — au contraire, si le coefficient est irrationnel et qu'il faille le figurer par un segment, l'algèbre géométrique ordinaire à deux dimensions devient insuffisante.

Considérons la proposition 1, où l'on démontre que les triangles et les parallélogrammes de même hauteur sont proportionnels à leurs bases : ici, la définition euclidienne et générale de l'égalité des rapports trouve une excellente application; les bases égales déterminant des surfaces égales, l'interprétation

de cette définition conduit directement à la proposition générale, sans qu'il ait été nécessaire, comme on le fait dans nos traités modernes, d'étendre, en le généralisant après coup, le cas où les quantités de même nature sont commensurables.

Après quoi, suivent les propositions 2 et 3 sur les transversales parallèles dans le triangle, et sur la division d'un côté du triangle par la ligne qui partage en deux l'angle opposé (bissectrice); puis les propositions capitales (4-7) sur les triangles semblables : on les démontre par construction d'un triangle semblable à l'un des triangles donnés, et congruent à l'autre, et on les peut appliquer tout de suite (8) à un triangle rectangle et aux deux triangles dans lesquels il est divisé par la hauteur sur l'hypoténuse.

9-13 contiennent la division d'un segment en parties égales, ou proportionnelles, ainsi que la construction de la troisième proportionnelle (c'est-à-dire de la quatrième à a, b et b), de la quatrième et de la moyenne proportionnelle : cette dernière construction est la même qu'on a déjà appliquée, en algèbre géométrique, à la détermination du côté d'un carré égal à un rectangle donné, — mais il fallait alors la démontrer autrement.

Ensuite, ce sont (14-23) des propositions sur le rapport entre les surfaces des figures, mais nous avons déjà parlé de la principale propriété sur les aires des parallélogrammes à angles égaux : dans la démonstration (19) établissant que le rapport de triangles semblables — comme nous disons aujourd'hui — est égal au carré du rapport entre deux côtés homologues, on ramène, pour pouvoir le composer avec lui-même, le rapport $(a:b)$ de ces deux côtés à la forme $b:c$, de telle sorte que le rapport carré devient $a:c$. Ce groupe de propositions contient encore la suivante : dans une proportion, le rectangle (produit) des termes extérieurs est égal au rectangle des termes intérieurs (16).

A l'aide de la théorie des proportions, la fin du Livre traite (28-29) les applications de surfaces généralisées. Une généralisation, précisément indépendante de la théorie des proportions, consiste à remplacer les rectangles par des parallélogrammes d'un angle donné quelconque; mais cette dernière transformation reste sans influence sur la signification géo-

métrico-algébrique de ces problèmes, et nous en pourrons faire abstraction pour ne parler que des rectangles.

Alors les problèmes dont il s'agit sont les suivants :

Sur un segment donné (a) *appliquer une surface donnée* (**B**) *sous forme d'un rectangle* (*de hauteur* x) *et tel que le rectangle manquant* (28), *ou en trop* (29), *soit semblable à un rectangle donné* (*de côtés c et d*).

Les solutions sont exactement les mêmes que celles que nous avons déduites (p. 37-39) de II, 5 et 6, pour les cas où les figures, manquant ou en trop, doivent être des carrés, excepté cependant que les carrés d'alors sont remplacés par des rectangles qui sont semblables au rectangle donné : la similitude apparaît nettement à ce qu'une seule et même droite est diagonale pour les deux rectangles semblables.

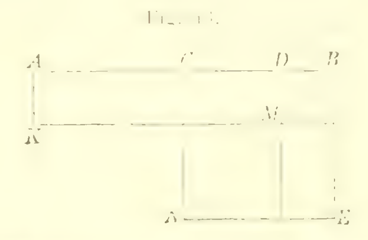


Fig. [illegible].

Afin de mettre en évidence l'extension donnée à l'algèbre géométrique par ces propositions, nous nous servirons de la représentation algébrique suivante des problèmes, et des déplacements de figures qui les résolvent :

$$\mathrm{B} = ax \mp \frac{c}{d}x^2 = \mp \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2} \mp \frac{c}{d}x\right)^2 \pm \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

représentation dans laquelle, par l'emploi moderne des *signes*, nous avons voulu éviter un *double* énoncé. Il s'agit, pour trouver x, de construire le rectangle $\frac{d}{c}\left(\frac{a}{2} \mp \frac{c}{d}x\right)^2$ semblable au rectangle donné et égal à la différence ou à la somme des surfaces connues $\frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2$ et B. Pour cela — B étant supposé être une figure rectiligne donnée — on se sert du problème 25, déjà mentionné à propos des pythagoriciens :

Construire une figure qui soit égale à une figure rectiligne donnée et semblable à une autre.

Le problème 28 exige, comme diorisme, que

$$B \; [illegible]$$

ou bien que la figure donnée, B, ne soit au plus égale au rectangle construit sur la moitié du segment *a*, et semblable au rectangle donné *cd* : ce diorisme est adjoint au problème à la manière ordinaire, mais la nécessité en est démontrée dans la précédente proposition 27 avec la même transposition que celle qui sert dans 28. Comme nous l'avons déjà remarqué au paragraphe 11, ce diorisme sera sans doute directement issu de l'analyse qui correspond à l'exposition synthétique de 28; et, si l'on remplace le rectangle *cd* par un carré, le diorisme dit alors qu'un carré est plus grand qu'un rectangle dont la somme des côtés soit la même (résultat qui découle également, comme nous l'avons déjà noté, du Livre V, 25).

La proposition 30 traite de la division d'un segment en moyenne et extrême raison : la construction a déjà été indiquée une fois (II, 11, p. 42), et s'appuyait alors sur II, 6; la même construction s'appuie encore sur la proposition VI, 29, qui est une généralisation de II, 6. La raison pour laquelle Euclide se répète est la même que pour la construction des moyennes proportionnelles; à savoir, que ce problème est, cette fois, grâce à la théorie des proportions, autrement exprimé qu'auparavant.

La proposition 31 comprend l'extension du théorème de Pythagore à des figures semblables quelconques et construites sur les côtés d'un triangle rectangle; de plus, en vertu de cette proposition 31 que l'on attribue à Euclide lui-même, on peut effectuer à l'aide du triangle rectangle l'addition de figures dans les applications de surfaces de 28 et de 29, si B toutefois est donné comme semblable au rectangle *cd*, ou lui est rendu semblable.

Dans la proposition 33, la dernière du Livre, on démontre que les angles au centre, ou inscrits dans un cercle, sont proportionnels aux arcs correspondants.

Comme on le voit, donc, le cinquième et le sixième Livre con-

tiennent les principes nécessaires à un traitement exact et parfaitement général, par la théorie des proportions jointe à l'algèbre géométrique, de problèmes qui, dans notre algèbre, dépendent d'équations du premier et du second degré. Les autres travaux conservés nous prouvent bien que l'on a réellement utilisé ces principes, en particulier le traitement géométrico-algébrique des sections coniques d'Apollonius, de même que de fort nombreuses questions qui nous furent conservées par Pappus; il y avait même une préparation expresse à toute cette besogne algébrique : il est aisé de s'en apercevoir à diverses propositions des *Data* d'Euclide énonçant une foule de problèmes de cette espèce, dans les formes dont nous avons parlé, et dont on jugea utile de pouvoir considérer la solution comme si bien connue, pendant la continuation des recherches d'analyse, que l'on put se contenter d'y ramener simplement les nouveaux problèmes.

Ce que nous exprimerions par une équation du premier degré à coefficients quelconques, les *Data*, pour avoir une forme valable, en général, l'expriment par une proportion. Pour ne donner qu'un exemple, entre cent, la proposition 15 des *Data* dit que : si l'on ajoute des quantités données à deux quantités qui sont dans un rapport donné, ou bien les sommes elles-mêmes sont dans le rapport donné, ou bien le surplus de l'une, excédant une quantité donnée [1], est avec l'autre dans le rapport donné.

Cela équivaut à déterminer x par la proportion

$$(a + m - x) : (b + n) = a : b.$$

La première des alternatives mentionnées exprime que x peut être nul, à savoir si

$$m : n = a : b.$$

On évite, d'ailleurs, un x négatif en remplaçant l'équation par la suivante :

$$(a + m) : (b + n + x) = a : b.$$

---

(1) A savoir x, donnée, non pas comme hypothèse, mais en vertu de la construction à faire d'après la démonstration de la proposition. Nous dirions plutôt aujourd'hui : *que l'on peut déterminer*. (P. T.)

Nous avons déjà dit précédemment (p. 98) que les *Data* renferment des problèmes directement réductibles à des applications de surfaces.

Comme types de propositions dénotant, dans les *Data*, la notion de problèmes qui dépendent plus indirectement d'équations du second degré, nommons ici les propositions 85 et 87 : si deux segments comprennent, sous un angle donné, un parallélogramme de grandeur donnée, et si la somme ou la différence des carrés (construits) sur ces segments est donnée, les segments sont aussi donnés. En d'autres termes, on connaissait (sous forme géométrique) les solutions des équations

[illegible]

17. — Grandeurs commensurables et leur traitement numérique : septième-neuvième Livre d'Euclide.

Dans le septième Livre, Euclide introduit une *unité* par laquelle on exprime en *nombres entiers* les grandeurs qu'elle mesure : il traite ensuite, dans ce Livre et les deux suivants, des nombres entiers, de leurs rapports et autres relations entre eux. Pour les nombres entiers, ce Livre présente des propositions sur les proportions, propositions que le cinquième Livre a déjà démontrées en toute généralité : mais il faut dire aussi que la théorie générale des proportions du cinquième Livre était assez nouvelle et, par conséquent, n'était point encore suffisamment développée pour servir à établir tout ce qu'elle embrasse dans la réalité ; — ainsi, cette théorie des proportions nous fut transmise au septième Livre selon l'ancien mode de traitement, dans lequel on ne tient aucun compte de ce que les termes des rapports peuvent être incommensurables.

La raison pour laquelle on ne pouvait laisser tout simplement de côté la théorie des rapports entre nombres entiers, comme impliquée dans la théorie plus générale déjà exposée, c'est que, pour ceux-ci, il fallait considérer autre chose que ne le fait la théorie générale, notamment les questions de divisibilité et la simplification des rapports numériques : on le voit immédiatement à ce fait que, pour les

nombres, Euclide donne une *définition nouvelle de la proportionnalité*, la définition 20. Suivant cette définition, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque a et c sont, soit les mêmes multiples, ou la même partie aliquote, soit les mêmes parties aliquotes de b et de d, c'est-à-dire si, en même temps, $a = m\frac{b}{n}$ et $c = m\frac{d}{n}$; sans doute, en ce qui concerne l'égalité des rapports, cette définition ne renferme rien d'autre que ce qu'impliquait déjà la cinquième définition du cinquième Livre, mais on verra bientôt que, selon la manière dont on l'utilise, elle introduit cependant une hypothèse qui n'est pas sans importance.

Les propositions 1 et 3 établissent et démontrent les règles connues pour la détermination de la plus grande commune mesure : il y est démontré — directement — qu'on obtient une commune mesure, et — antithétiquement — qu'on obtient la plus grande.

4 établit que, a et b étant des nombres entiers, et f leur plus grande commune mesure, on peut toujours écrire $a = mf$, $b = nf$ et, par suite, $a = m\frac{b}{n}$: si $a < b$, alors $m \geq 1$, $n > 1$. D'après cela, m et n sont des nombres premiers entre eux; et si, maintenant, s'appuyant sur cette détermination, on cherche à vérifier selon la définition 20 que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on introduit alors l'hypothèse que, si tel est le cas, le dernier facteur $\frac{d}{n}$, de $c = m\frac{d}{n}$, est un nombre entier — donc que n, s'il divise un produit md et qu'il soit premier avec l'un des facteurs m, doit diviser l'autre facteur d.

Cette proposition fondamentale de la théorie des nombres est donc déjà comprise dans les hypothèses, et il n'importe guère, au point de vue théorique, qu'Euclide ait basé plus tard sur ces hypothèses plusieurs des propositions qu'implique la précédente; ainsi, dans 30, lorsqu'on dit qu'un nombre premier qui divise un produit doit aussi diviser l'un des facteurs de ce produit. Les hypothèses en question sont employées notamment dans la proposition 20 : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et si c et d sont

aussi petits que possible, c divise a et d divise b. Cette dernière proposition est importante pour la démonstration par laquelle on parvient à la proposition 30.

Comme on le sait, on se sert, dans la démonstration réelle du théorème fondamental cité, de cette circonstance que, si a et b sont premiers entre eux, k est le plus grand commun diviseur de ka et de kb, — proposition qu'Euclide ne fait point entrer dans son Livre et qui découle des règles de détermination du plus grand commun diviseur. Ce qui manque, dans Euclide, c'est une démonstration pour établir que la transformation, décrite dans 4, de a en $m\frac{b}{n}$ est l'unique possible pour laquelle m et n soient premiers entre eux.

De ce que nous venons de dire, il résulte sans doute qu'Euclide ne donne pas à la théorie des nombres entiers une base aussi profonde qu'à la Géométrie et à la théorie des grandeurs générales continues; mais le soin qu'il apporte, par ailleurs, à exposer et à établir la nombreuse série des propositions essentiellement théoriques prouve assez, toutefois, qu'il voyait bien la nécessité, en Arithmétique même, d'un traitement exact, et qu'il faisait usage des opérations pour la théorie desquelles il dépense tant d'application. Cependant, les trois Livres arithmétiques n'ont point eu jusqu'à nos jours pour la Mathématique l'importance fondamentale qu'eurent les Livres antérieurs, et une partie des suivants; aussi nous contenterons-nous ici de quelques remarques très peu nombreuses sur le restant de leur contenu.

La théorie des rapports, au septième Livre, n'est en principe qu'un exposé des propositions générales les plus importantes employées dans le calcul des fractions. (Aussi, contrairement à ce que nous avons fait pour le cinquième Livre, avons-nous écrit les rapports sous forme de fractions.)

Les proportions continues, que traitent le huitième et le neuvième Livre, sont, comme nous l'avons déjà dit, la forme antique des progressions géométriques, mais employées ici avec des termes entiers : les rapports entre des termes à indices différents dans une telle série figurent la forme antique des diverses puissances des nombres entiers et des fractions. Certaines propositions sur les racines sont le résultat d'une intercalation de moyennes proportionnelles.

Les propositions les plus importantes qui aient été obtenues, pour la théorie des nombres, sont les propositions 20 et 36 du neuvième Livre : la première démontre l'infinité de la suite des nombres premiers par ce fait que le produit de tous les premiers nombres premiers $+ 1$, ou bien est un nombre premier supérieur, ou bien encore contient en facteur un nombre premier supérieur; la deuxième annonce que le produit $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)2^n$, si le premier facteur est un nombre premier, constitue un nombre « parfait », c'est-à-dire tel qu'il soit égal à la somme de ses parties aliquotes (p. 28), ce dont il est facile de démontrer la justesse, puisque — comme nous l'avons déjà dit (p. 120) — la proposition 35 nous donne la sommation, nécessaire *ad hoc*, des progressions géométriques.

18. — Grandeurs incommensurables; dixième Livre d'Euclide.

Si, à propos du dixième Livre des *Éléments*, le plus étendu, nous n'entrons guère dans le détail, ce n'est pas que le travail qui y est consigné — travail commencé par Théétète et achevé par Euclide — ait trop peu d'importance pour mériter notre pleine attention : au contraire, en dépit de l'exécution soignée de ce Livre, la difficulté que l'on rencontre quand on veut, d'un coup d'œil, en embrasser le contenu, provient de la tâche pénible qui consiste à distinguer, sans aucun système de signes, entre les grandeurs irrationnelles qui s'y trouvent classées.

Aussi, bien que les classifications en question soient employées ensuite pendant longtemps, ce Livre, toutefois, ne put acquérir une importance historique aussi durable que tant d'autres parties de l'œuvre d'Euclide, et la raison en est que, par la suite, le langage des symboles, même aux premiers stades de son développement, va procurer un aperçu beaucoup plus simple des différentes espèces de quantités irrationnelles; et, nous-mêmes, nous contenterons de donner ici, à l'aide des symboles modernes, une idée de ce que sont les grandeurs classées dans ce Livre, sans nous préoccuper des dénominations au moyen desquelles Euclide en fait la classification.

Pour ce qui est de ces dénominations — afin d'éviter toute méprise aux lecteurs du texte même d'Euclide — je ferai

seulement remarquer que, quand il parle de grandeurs *rationnelles*, il n'entend pas uniquement celles qui sont commensurables avec l'unité, mais encore celles dont les carrés le sont ou, selon son expression, qui « sont commensurables en puissance » avec l'unité. Au reste, Euclide n'emploie pas ici le terme d'*unité*, au sens qu'il a dans les Livres consacrés à la théorie des nombres, mais nous désignons ainsi une quantité choisie arbitrairement, considérée comme rationnelle et qui, dans le contexte, joue le même rôle qu'une unité.

On s'assure de la commensurabilité et de l'incommensurabilité, comme nous l'avons déjà dit (p. 45), en essayant de déterminer directement la plus grande commune mesure : l'incommensurabilité se reconnaît alors à ce que cette opération peut se continuer à l'infini, tandis que les restes successifs diminuent sans cesse et au-dessous de toute limite fixée. Cette décroissance à l'infini est traitée par Euclide avec la même rigueur scientifique que toute approximation indéfinie chez les anciens, et, cela, toujours à l'aide de la quatrième définition du cinquième Livre : il en déduit (prop. 1) qu'en soustrayant d'une grandeur donnée plus de sa moitié et, ensuite, des restes successivement obtenus, plus de leur moitié, on peut arriver finalement à une grandeur plus petite qu'une autre grandeur arbitrairement donnée.

A partir de cette proposition, il entreprend d'abord quelques investigations générales sur des quantités irrationnelles, sans tenir compte de leur formation et, de même, sur de nouvelles quantités irrationnelles composées avec ces dernières; puis viennent des recherches particulières sur les racines carrées, notamment celles que nous avons déjà mentionnées à propos des cas où ces racines apparaissent comme rationnelles et, notamment, sur les triangles rationnels rectangles. Les formes des grandeurs irrationnelles qu'il établit plus loin sont des *racines quatrièmes* de quantités rationnelles, des expressions de la forme $p \pm \sqrt{p^2 - q}$, $\sqrt{p^2 - q} \pm p$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, ainsi que les racines carrées de ces expressions ou, plus exactement, comme nous le verrons par un exemple, certaines transformations de ces racines carrées en sommes ou en différences : les termes de ces dernières se déterminent

alors au moyen d'équations de la forme $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$, dans lesquelles a et b eux-mêmes ont déjà une forme donnée.

En dehors des définitions des différentes classes de grandeurs irrationnelles, le travail qu'Euclide exécute ici consiste principalement en démonstrations propres à établir que les quantités formées sont irrationnelles et, en général, différentes les unes des autres; au reste, ce dernier point comporte la nécessité de faire ressortir expressément les cas particuliers pour lesquels une expression de l'une des formes peut se réduire à une forme plus simple, ou être composée d'expressions de formes plus simples : et, de cette façon, la transformation connue de l'expression doublement irrationnelle

$$\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q^2}}$$

en une irrationnelle plus simple appartient à cette catégorie.

Cette transformation est respectivement effectuée, 54 et 91, pour les signes + et —; on l'emploie ensuite, dans 57 et 94, pour transformer l'expression $\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}}$, dans le cas où q n'est pas un carré, en

$$\sqrt{\frac{p + \sqrt{q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p - \sqrt{q}}{2}}.$$

C'est à cette forme que conduisent les équations des propositions 39 et 76, dont le but est d'établir l'existence des irrationnelles, dites *majeure* et *moindre*; et les opérations au moyen desquelles on effectue ces transformations, ou d'autres semblables, sont représentées, sous la forme de l'Algèbre géométrique, mais, au fond, ce sont les mêmes qu'on exprimerait aujourd'hui en langage algébrique et que l'on emploierait à résoudre les équations correspondantes.

19. — Éléments de Stéréométrie; polyèdres réguliers; onzième et treizième Livre d'Euclide.

Tout en faisant preuve, dans son dixième Livre, d'une très profonde habileté d'algébriste lorsqu'il traite des problèmes

qu'on aborderait à présent par une résolution répétée d'équations du second degré, Euclide crée en particulier les moyens nouveaux pour désigner les grandeurs auxquelles il aboutit dans sa détermination des côtés et des arêtes des polygones et des polyèdres réguliers; mais, avant d'en arriver là dans son treizième Livre, il lui faut exposer tout d'abord, dans le onzième, les premiers éléments de la Stéréométrie.

Dans les premières propositions relatives à la position réciproque des droites et des plans, on rencontre dès l'origine les mêmes théorèmes et les mêmes démonstrations que dans les traités modernes : Euclide doit ici cependant, comme en Géométrie plane, à côté des théorèmes, faire place aux constructions, puisque c'est par elles que se font les démonstrations nécessaires de l'existence des figures en question. Et si l'on veut bien considérer que les constructions à l'aide de plans ne sont pas préparées ici comme le sont, dans les postulats du premier Livre, les constructions au moyen des droites, on voit qu'il est obligé de les ramener, autant que possible, à des constructions planimétriques : c'est ainsi qu'Euclide abaisse (proposition 11) une perpendiculaire sur un plan à partir d'un point A, situé en dehors de ce plan, en menant d'abord, du point A, une perpendiculaire AD à une droite quelconque BC du plan, puis, de A, une perpendiculaire sur la droite du plan qui est, elle-même, perpendiculaire sur BC au pied D de la première perpendiculaire. Il obtient ensuite (12) la perpendiculaire en un point quelconque d'un plan en abaissant d'abord, d'un point extérieur, une perpendiculaire au plan, puis en menant par le point donné une parallèle à cette perpendiculaire.

Euclide comprend en particulier, dans son Livre, les propositions qui peuvent trouver plus tard leur application dans la recherche et la construction des parallélépipèdes et des polyèdres, par exemple, dans 20 et 21, les propositions connues sur les faces d'un angle solide, trièdre ou quelconque. Après quoi, la construction d'un angle trièdre dont les faces soient données est préparée dans 22, et exécutée dans 23 : elle s'effectue en sectionnant des segments égaux sur les côtés des angles donnés comme faces, puis, avec les bases qui sont opposées aux angles donnés dans les triangles isoscèles ainsi formés,

on construit un triangle que l'on inscrit dans un cercle; le centre de ce cercle est alors la projection du sommet trièdre cherché. La possibilité de cette construction est démontrée soigneusement, à condition toutefois que les faces satisfassent aux conditions posées dans les propositions 20 et 21 : et voilà bien rendu évident le fait que ces conditions sont suffisantes.

Le reste du Livre traite notamment des parallélépipèdes, des rapports entre leurs grandeurs, et se termine par la détermination du volume d'un prisme triangulaire; d'ailleurs, les démonstrations de volume souffrent de la lacune que présentent les hypothèses géométriques sur les grandeurs stéréométriques, et dont nous avons parlé plus haut, page 106.

Le douzième Livre contient, entre autres, la détermination du volume d'une pyramide : nous aurons l'occasion d'en parler plus amplement, en même temps que des autres déterminations obtenues dans ce même Livre au moyen de la démonstration par exhaustion.

Le reste de la Stéréométrie se trouve dans le Livre suivant, XIII, qui comprend la détermination des cinq polyèdres réguliers ainsi que celle de la grandeur de leurs arêtes, étant donné le diamètre de la sphère circonscrite : pour cela, quelques lemmes géométrico-algébriques sont indispensables, tout comme une détermination des côtés des polygones réguliers plus complète que celle qui fut fournie, dès le quatrième Livre, par la construction des polygones.

Les premières propositions s'expriment, en Algèbre moderne, de la manière suivante : si x et y sont les sections d'un segment a divisé en moyenne et extrême raison, et que l'on suppose $x > y$, alors

(1) $$x + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$ [(2) est la réciproque de (1)];

(3) $$y + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{5},$$

(4) $$a^2 + y^2 = 3x^2,$$

(5) $$a^2 = x(a + x);$$

d'où l'on conclut, dans (6), que x et y appartiennent à cette espèce d'irrationnelles qui devaient prendre le nom d'*apotomes* dans le dixième Livre.

Puis viennent quelques propositions sur les côtés des pentagone, hexagone et décagone réguliers : à remarquer, notamment, dans la dixième, une élégante démonstration établissant que, parmi les trois côtés de ces polygones, le premier est l'hypoténuse, les deux autres sont les côtés d'un triangle rectangle.

La proposition 11, se fondant sur des considérations géométriques, calcule le côté du pentagone, étant donné d, diamètre du cercle circonscrit; la détermination euclidienne aboutit directement à calculer ce côté de la manière que nous indiquerions par $\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}$, mais les moyens manquent à Euclide pour établir une telle expression : il se contente d'exprimer le théorème en affirmant que le côté du pentagone, d étant rationnel, est irrationnel, de la forme qu'il appelait « irrationnelle moindre », dans son dixième Livre, et de donner à sa détermination réelle la forme d'une démonstration de cette affirmation. Il est vrai que cette démonstration est prolixe : et la cause en est dans le fait qu'Euclide devait prouver expressément qu'on ne peut faire disparaître l'irrationalité double, car dans ce cas la quantité irrationnelle appartiendrait à une autre classe.

12 détermine le côté d'un triangle équilatéral.

13 construit un tétraèdre régulier, et montre que l'arête k est égale à $d\sqrt{\frac{2}{3}}$, en designant par d le diamètre de la sphère circonscrite.

14 construit un octaèdre régulier et prouve que $k = d\sqrt{\frac{1}{2}}$.

15 construit un hexaèdre régulier et prouve que $k = d\sqrt{\frac{1}{3}}$.

16 construit un icosaèdre régulier et, en effectuant un calcul réel, démontre que l'arête est « une irrationnelle moindre ».

17 construit un dodécaèdre régulier et, par exécution d'un calcul réel, démontre que son arête appartient aux grandeurs irrationnelles dites *apotomes*.

18 montre, sur une seule et même figure, les constructions des différentes arêtes : cette figure sert en même temps à les comparer entre elles.

Ces constructions prouvent que les cinq polyèdres régu-

liers existent réellement : ce à quoi la proposition finale du Livre ajoute une démonstration établissant qu'ils sont les seuls possibles.

La plupart des éditions d'Euclide comprennent encore un livre, dit *quatorzième*, qu'il faut attribuer à un mathématicien un peu plus récent, Hypsiclès, et un *quinzième* Livre qui est certainement beaucoup moins ancien; on en fait, d'ailleurs, les appendices de l'œuvre d'Euclide parce que, comme le dernier Livre d'Euclide, ils traitent des polyèdres réguliers.

Le Livre d'Hypsiclès constitue effectivement un progrès dans l'étude de ce sujet : comme exemple des propositions qu'il contient, nous pouvons citer celle qui dit que les cercles circonscrits aux faces d'un icosaèdre et d'un dodécaèdre réguliers sont d'égale grandeur, à condition que les deux polyèdres soient inscrits dans la même sphère. En tant que monographie, ce Livre n'appartient plus, à proprement parler, aux *Éléments*, mais c'est un joli type des investigations dont s'occupaient les mathématiciens de l'époque alexandrine et, d'après son avant-propos, il forme la continuation de recherches semblables qui remontaient au grand géomètre Apollonius.

A ces œuvres sur les polyèdres réguliers, rattachons encore un autre travail qui traite d'un sujet voisin, à savoir la *détermination* par Archimède des *polyèdres semi-réguliers*, c'est-à-dire de ceux qui sont limités par des polygones réguliers de différentes espèces : dans un ouvrage perdu, mais dont Pappus nous rend compte, Archimède trouva qu'il existait treize solides de cette nature.

20. — Démonstration par exhaustion : douzième Livre d'Euclide.

Dans la détermination exacte des quantités qui interviennent comme valeurs limites pour une approximation indéfinie, Eudoxe avait appliqué essentiellement les mêmes moyens que ceux qui lui servaient, dans la théorie des proportions, à traiter exactement les grandeurs qu'on ne peut déterminer qu'approximativement à l'aide de rapports numériques rationnels : et la méthode qu'il inventa, afin d'établir sûrement ces

valeurs limites sans recourir à l'idée d'infini, mise alors au ban par les mathématiciens, présente des formes si précises qu'elle mérite vraiment un nom particulier, qui lui fut donné au XVII[e] siècle; nous l'appellerons *Démonstration par exhaustion.* Cette démonstration repose sur l'hypothèse, établie dans la quatrième définition du cinquième Livre ou, plus directement, sur la proposition I du dixième Livre, tirée elle-même de cette hypothèse, à savoir qu'en enlevant la moitié d'une grandeur, ou plus de la moitié, et en répétant cette opération un nombre suffisant de fois, on peut arriver en fin de compte à une quantité plus petite que n'importe quelle grandeur, donnée à l'avance et de même espèce : en notre langage moderne

$$\text{Lim}\ \alpha.\beta.\gamma.\ldots = 0, \quad \text{si} \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots < \tfrac{1}{2}.$$

Étudions la démonstration par exhaustion dans sa première application chez Euclide, qui (Liv. XII, 2) s'en sert pour établir que les surfaces de deux cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs diamètres : la proposition précédente, 1, démontre que des polygones semblables inscrits sont proportionnels aux carrés de leurs diamètres, et l'on peut alors dire, brièvement, que la démonstration de 2 consiste à considérer les cercles comme limites de ces polygones.

La validité de ce passage à la *limite* est garantie par la démonstration par exhaustion, et l'application à cet effet de X, 1, qui n'intervient que dans la démonstration même, a pour but d'établir, dans ce cas, que l'on peut inscrire dans un cercle un polygone ayant un nombre de côtés tel que la différence entre le cercle et lui soit inférieure à n'importe quelle limite donnée : en effet, par une duplication du nombre des côtés du polygone, les triangles que l'on inscrit dans les segments de cercle qui constituent cette différence ont pour grandeur la moitié de rectangles qui comprennent ces segments et, par conséquent, sont eux-mêmes plus grands que la moitié des segments.

Pour démontrer, maintenant, A et B étant les cercles, a et b leurs rayons, que

$$A : B = a^2 : b^2,$$

on admet que

$$a^2 : b^2 = A : C$$

et, pour vérifier si $C < B$ est alors possible, on inscrit, dans A et B, des polygones réguliers semblables, A′, B′, ayant assez de côtés pour que $B - B' < B - C$, donc $B' > C$. On devrait avoir alors

$$a^2 : b^2 = A : C = A' : B';$$

ce qui est impossible, car $A > A'$, mais $C < B'$; le cas où $C > B$ se ramène au précédent, puisque de $C > B$ on pourrait déduire que

$$b^2 : a^2 = C : A = B : D,$$

où

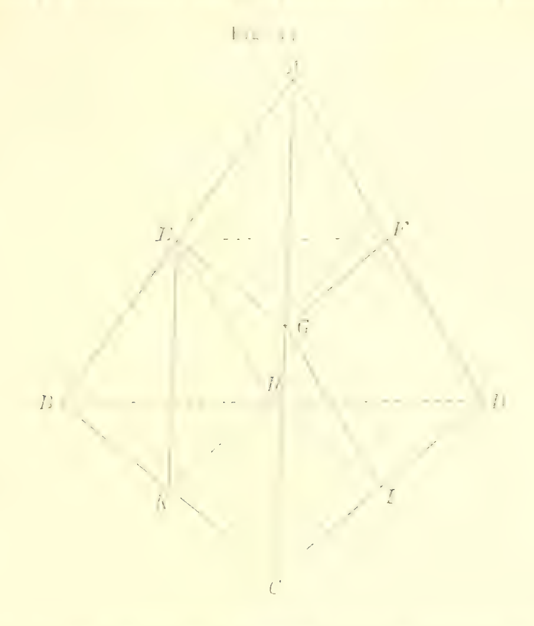
$$D < A.$$

Il est clair que, les quantités variables A′ et B′ ayant les valeurs limites A et B, et le rapport $A' : B'$ ayant une valeur constante, la même démonstration peut toujours servir à montrer que le rapport $A : B$ possède la même valeur; si, en particulier, $A' = B'$, on a $A = B$. Toutefois, les anciens n'établissent pas cette proposition une fois pour toutes, comme on le ferait dans la théorie moderne de l'infini, car cela reviendrait à vouloir expliquer des notions de même nature que l'approximation infinitésimale, et par suite à les admettre, ce qu'ils ne font pas; ils se contentent, tant Euclide que plus tard Archimède, de répéter les mêmes formes de démonstration dans chaque cas particulier où s'en présente l'occasion.

Dès la proposition 5, dans laquelle il est établi que deux pyramides triangulaires de même hauteur sont proportionnelles aux surfaces de leurs bases, Euclide trouve une occasion de répéter la démonstration citée, après avoir démontré dans 3 et 4 que les hypothèses nécessaires pour qu'elle soit applicable existent bien réellement. Il procède alors de la manière suivante : au moyen des plans EFG, EGHI, et EHK passant par les milieux de 3 ou de 4 arêtes, il décompose, comme dans la figure suivante, une pyramide triangulaire en deux pyramides qui lui soient semblables, de dimensions linéaires moitié moindres, et en deux prismes égaux entre eux; chaque prisme a la même

hauteur et la même surface de base que l'une des petites pyramides, ce qui se déduit des propositions du Livre précédent.

Fig. 11.



Si l'on divise maintenant chacune des petites pyramides de la même manière, et que l'on continue de la sorte, on obtiendra comme valeurs approximatives de la pyramide la somme des 2 premiers prismes, des 4 suivants, des 8 suivants, et ainsi de suite. Chaque fois, d'ailleurs, que l'on passe à une nouvelle approximation, on voit que les prismes enlevés à la pyramide équivalent à plus de la moitié : en effet, les deux petites pyramides, produites par la division d'une pyramide primitive, sont plus petites que les deux prismes, puisqu'on peut les disposer de manière à ne constituer que des parties de ceux-ci.

Si, maintenant, on a deux pyramides, A et B, de même hauteur, et qu'on se serve comme valeurs approximatives de ces pyramides des sommes de prismes A′ et B′, obtenues en poussant également loin la division des deux pyramides, il ne s'agit plus (4) que de montrer que A′ : B′ est égal au rapport entre les surfaces de bases (F et G). Désignons, pour

les deux pyramides, les sommes des deux premiers prismes par u_1 et v_1, les sommes des 4 prismes, issus de la division suivante par u_2 et v_2, celles des 8 suivants par u_3 et v_3, etc., nous parviendrons au résultat désiré en démontrant que

$$F : G = u_1 : v_1 = u_2 : v_2 = u_3 : v_3 \ldots = A : B ;$$

et la démonstration par exhaustion donne alors (dans 5) :

$$A : B = F : G.$$

La signification du procédé que nous employons ici apparaît, surtout, si l'on remarque que la proposition 3 donne les conditions qui assurent, d'après X, 1, que

$$A = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ etc., jusqu'à l'infini,}$$

considération qui fait immédiatement naître l'envie d'étudier plus complètement la série convergente.

On voit sans difficulté — ce dont Euclide même s'est servi en partie, Liv. XII, 4, — que chacun des deux prismes égaux, dans u_1, est semblable à deux des 4 prismes égaux dans u_2, etc., d'où il résulte

$$u_2 = \tfrac{1}{4}\, u_1, u_3 = \tfrac{1}{4}\, u_2, \ldots,$$

ou bien

$$A = u_1\left(1 + \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right) = \tfrac{4}{3}\, u_1 = \tfrac{1}{3}\, u_0,$$

u_0 désignant un prisme de même hauteur et de même surface de base que la pyramide P. A l'appui, cependant, de la justesse de cette proposition, il est facile de donner une démonstration par exhaustion.

Sans doute, Euclide n'emploie pas ce procédé. Si, néanmoins, nous avons jugé bon de le donner en cet endroit, où nous cherchons à connaître, non pas seulement les méthodes d'Euclide, mais en général celles des anciens, c'est qu'*Archimède*, en réalité et comme nous le dirons bientôt, *emploie absolument la même sommation d'une série infinie pour trouver la surface d'un segment de parabole*.

Au lieu de cette sommation, dans la proposition 7 Euclide utilise la division connue d'un prisme triangulaire en trois pyramides pour trouver le volume de la pyramide triangulaire : et il est fort inutile de nous arrêter à la transition

aux pyramides à base polygonale, non plus qu'à la transition des prismes et des pyramides aux cylindres et aux cônes, transition qui s'effectue naturellement à l'aide de la démonstration par exhaustion.

La démonstration qui établit, dans 18, que deux sphères sont proportionnelles aux cubes des rayons est cependant plus difficile, car il est impossible, ici, de former des valeurs approximatives aussi simples que pour les surfaces circulaires; aussi, comme préliminaire à cette démonstration, Euclide résout-il (17) le problème suivant : Inscrire, dans une sphère donnée, un polyèdre qui enferme entièrement une autre sphère donnée, concentrique et plus petite. Cette question peut se résoudre de la manière suivante : dans un grand cercle de la plus grande sphère (appelons ce cercle équateur) on inscrit un polygone régulier d'un nombre pair de côtés ($2n$), de telle sorte qu'il enferme le grand cercle de la sphère la plus petite et situé dans le même plan; on inscrit alors dans l'équateur de la grande sphère un polygone régulier d'un nombre double de côtés ($4n$), puis, par les sommets de ce polygone et par le pôle de l'équateur, on construit de nouveaux grands cercles (méridiens) que l'on divise, à partir du point d'intersection avec l'équateur, en autant de parties ($4n$) qu'en a l'équateur. Les points de division seront alors les sommets du polyèdre cherché, dont les surfaces latérales sont des trapèzes et des triangles, ces derniers étant situés autour des pôles.

Il résulte nettement de la démonstration complète d'Euclide qu'il ait voulu donner cette solution, encore que dans le texte actuel ce ne soit pas elle qui précède sa démonstration, mais bien une autre solution, d'ailleurs erronée.

Sans doute, ici, l'on n'est point en présence d'une série de valeurs approximatives pour les sphères, mais, toutefois, la démonstration par exhaustion y peut être employée comme précédemment : en effet, si A et B sont les sphères données, a et b leurs rayons, et que C soit une sphère concentrique à B déterminée par l'équation $A : C = a^3 : b^3$, on peut, si $C < B$, inscrire dans B un polyèdre B', enfermant entièrement C, et dans A un polyèdre A', semblable à B'. Ces polyèdres sont alors employés de la même manière que les quantités que

nous avons désignées par A' et B' dans la démonstration par exhaustion donnée plus haut.

Pour mettre cependant en pleine lumière la valeur logique de la démonstration par exhaustion, il serait utile de la comparer aux procédés modernes. Bien que les anciens évitent absolument des expressions telles que « valeur limite d'approximation infinie », la démonstration par exhaustion n'en détermine pas moins, en réalité, comme nous l'avons dit, ces valeurs mêmes; et c'est précisément la notion rigoureuse de limite qui gît à la base de tout le procédé, puisque l'on désire pouvoir pousser l'approximation (finie) jusqu'à ce que l'écart entre la valeur approchée et la valeur limite soit inférieur à toute grandeur donnée.

La démonstration par exhaustion est donc une démonstration exacte, antithétique, de l'*univocité* de ce mode de détermination, ou de ce fait que deux quantités, qui sont ainsi limites des mêmes valeurs approximatives, sont égales : elle est, par cela même, l'un des termes nécessaires de toute recherche infinitésimale complète, et un terme tel que, chaque fois qu'il y a démonstration par exhaustion, on peut dire qu'on a affaire à une investigation infinitésimale, à savoir celle qui conduit au résultat dont la justesse sera postérieurement démontrée.

Les recherches infinitésimales qu'on trouve chez les anciens auteurs, là où ils se sont servis de la démonstration par exhaustion, peuvent d'ailleurs se ramener à certaines méthodes infinitésimales employées encore aujourd'hui : ainsi peut-on dire que non seulement les pyramides, dans Euclide, XII, 5, et le segment de parabole dans Archimède, mais encore les cercles, dans la proposition XII, 2, sont tous déterminés à l'aide de séries convergentes, et aussi qu'Archimède, nous le verrons, recourt aux mêmes sommes de quantités infiniment petites, et en nombre infini, actuellement nommées *intégrales définies*. La démonstration par exhaustion rend rigoureuse l'application exacte de ces procédés, mais les anciens, du moins dans ceux de leurs écrits qui nous sont parvenus, s'attachent tellement à assurer cette rigueur, *dans chaque cas particulier*, qu'il ne leur reste plus de place pour développer, au delà du besoin momentané, les méthodes dont

ils se servent pour trouver leurs résultats, — non plus que pour en créer de nouvelles.

Lorsque, au XVIIe siècle, on se remit aux recherches infinitésimales, notamment en s'attachant à l'étude d'Archimède, il s'agissait, d'abord et surtout, de comprendre, non seulement comment il établit ses résultats, mais, en outre, de voir au moyen de quel processus il les avait découverts et comment on pouvait soi-même en trouver de nouveaux; c'est à cette fin que les méthodes allaient donc être développées. Néanmoins, la plupart du temps, on continua d'assurer les résultats acquis peu à peu, soit en répétant l'application de la démonstration par exhaustion, soit, du moins, de leur donner crédit en faisant remarquer que cette démonstration leur serait applicable : c'est ainsi, par exemple, que procédait Fermat, et l'on continua même encore lorsque le calcul différentiel et intégral eut été fondé par Newton et Leibnitz.

En revanche, quand on se fut lentement habitué à se servir d'une telle méthode, qui fournissait des résultats nouveaux, et que l'on fut devenu routinier dans le maniement des infiniment petits, on en vint souvent à négliger les précautions logiques et la confirmation de certitude que la démonstration par exhaustion avait pour but de donner : on envisagea les quantités infiniment petites comme suffisamment définies par leur nom seul et, parfois même, on allait jusqu'à considérer une grandeur comme définie par une série infinie, sans s'être même assuré de sa convergence.

Au XIXe siècle, seulement, on est tout à fait revenu aux exigences d'exactitude auxquelles satisfaisaient les anciens grâce à la démonstration par exhaustion, et l'on y parvient en établissant précisément l'existence des valeurs limites par des démonstrations qui, au fond, coïncident avec cette même démonstration par exhaustion. Seulement, à présent, cette dernière démonstration se fait, comme nous l'avons déjà indiqué lors de sa première application, *une fois pour toutes*, ou bien n'est employée que dans l'établissement de notions aussi générales que le sont la somme d'une série infinie, ou d'une intégrale définie, tandis que, dans l'antiquité, on la répétait à propos de chaque application particulière.

Il reste, toutefois, entre le traitement de ces questions

dans l'antiquité et à présent, une différence de forme assez importante qui, sans doute, laisse intacte la stricte rigueur des conclusions, mais provient des points distincts d'où l'on est parti. Cette différence s'est déjà fait jour lorsqu'il a été question, en général, de la continuité des grandeurs, continuité dont l'existence était directement supposée par les anciens dans les quatre premiers Livres d'Euclide pour les grandeurs géométriquement représentées, et ce n'est qu'après, au cinquième Livre, qu'on introduit les procédés arithmétiques dont on peut également se servir pour comparer les quantités non commensurables; maintenant, au contraire, c'est cette détermination arithmétique elle-même des grandeurs qui tient le premier rang, pour ne l'appliquer qu'ultérieurement à des quantités plus empiriques et aux variables continues.

Aujourd'hui l'on part souvent du procédé d'approximation arithmétique convergente, à l'aide duquel on détermine la surface d'une figure plane, par exemple d'un cercle, ou un volume, par exemple celui d'une pyramide, et on l'emploie pour définir la surface ou le volume; au contraire, les anciens considéraient la surface plane et le volume comme définis par les axiomes généraux sur les grandeurs que nous avons déjà appris à connaître dans le premier Livre d'Euclide; et, ainsi, cette proposition que le cercle est plus grand que tout polygone inscrit et plus petit que tout polygone circonscrit était une conséquence directe du huitième axiome. Des axiomes du premier Livre on déduisait les procédés d'approximation qui servaient alors aux déterminations, et qui sont maintenant employés aux définitions.

Où il y a toutefois accord complet, c'est en ceci que, dès ce temps-là, tout comme à présent, on exigeait que la *convergence* de ces procédés fût démontrée en toute rigueur.

Les axiomes généraux sur les grandeurs ne suffisent pas, cependant, quand il s'agit de déterminer la longueur d'une ligne courbe ou l'aire d'une surface courbe : aussi tient-on aujourd'hui pour particulièrement nécessaire de définir ces notions au moyen même du procédé d'approximation par lequel, de fait, on détermine ces grandeurs; et l'on verra qu'Archimède, du moins, remarquait la difficulté à laquelle

ici je fais allusion. Il ne cherche point à y obvier du reste à l'aide de définitions formelles des notions dont il s'agit; mais bien plutôt, au lieu de cela, il pose expressément les hypothèses qu'il emploie à la manière des anciens, — il postule, — en dehors des postulats généraux, il les pose, dis-je, dans les procédés d'approximation par lesquels il détermine les grandeurs, et dans ses démonstrations pour la convergence de ces procédés.

Ces hypothèses sont posées comme postulats dans son Ouvrage *Sur la Sphère et le Cylindre*; elles affirment alors que :

1° La ligne droite est le plus court chemin entre deux points;

2° De deux lignes tracées entre les mêmes points, et qui tournent leur convexité du même côté, la ligne externe est la plus grande;

3° Une surface plane est plus petite qu'une surface courbe de même périmètre;

4° De deux surfaces courbes limitées au même contour plan et qui orientent leur convexité du même côté, la surface externe est la plus grande.

Ce n'est évidemment que par une méprise qu'on a parfois voulu voir une définition de la ligne droite dans le premier cas de ces postulats, — séparé de son contexte, — car ce postulat et le suivant servent bien plus à définir la longueur d'une ligne courbe; les deux derniers, à définir l'aire d'une surface courbe. Que ces définitions indirectes soient suffisantes, cela résulte enfin de ce qu'elles conduisent en réalité aux déterminations, tandis que les 2° et 4°, en revanche, dont on ne pourrait sûrement se passer entièrement, renferment un peu plus que le strict nécessaire.

Après avoir pris connaissance ici des principes généraux dont Archimède s'est servi pour établir rigoureusement ses déterminations infinitésimales au moyen de la démonstration par exhaustion, nous pourrons, dans ce qui va suivre, nous contenter d'indiquer les décompositions à l'aide desquelles ces déterminations furent obtenues, et les résultats atteints de la sorte, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans les détails de leur démonstration.

21. — Déterminations infinitésimales chez Archimède.

Les mérites extraordinaires d'Archimède sont bien manifestes en d'autres domaines : nous les avons effleurés en partie déjà pour y revenir plus tard, mais, toutefois, sa puissance créatrice nous frappe, avant tout, dans les *investigations infinitésimales* auxquelles Eudoxe avait déjà donné un fondement si solide, et dans la *théorie de l'équilibre*, dont on ne connaît avant lui aucun traitement rigoureux. Ces recherches lui offrent de multiples occasions de montrer que, outre les Mathématiques élémentaires, il est également familiarisé avec la théorie des sections coniques : si familiarisé, même, qu'il va jusqu'à traiter les sections pratiquées sur des surfaces engendrées par la révolution de sections coniques; mais, comme nous préférons réunir plus tard ce que nous aurons à dire de la théorie grecque des sections coniques, nous nous contenterons, en parlant ici des Ouvrages d'Archimède, de mentionner à chaque fois les propriétés des sections qu'il emploie, sans nous enquérir préalablement de la source dans laquelle il en puise la notion.

Commençons donc notre analyse des recherches infinitésimales d'Archimède par le Traité *Sur la Quadrature de la Parabole*, car ce Traité, par exception, nous indique le point de départ de l'auteur pour aboutir au résultat; et ce résultat donna sans doute l'impulsion à des travaux de même nature dans ses autres écrits.

Archimède qualifie de *mécanique* la méthode par laquelle il a d'abord trouvé la surface du segment limité par un arc de parabole et sa corde, et, cela, parce qu'il s'y appuie sur les théorèmes des moments statiques et du centre de gravité du triangle, théorèmes qu'il a exposés dans son Livre *Sur l'Équilibre des figures planes* dont nous aurons à parler plus loin.

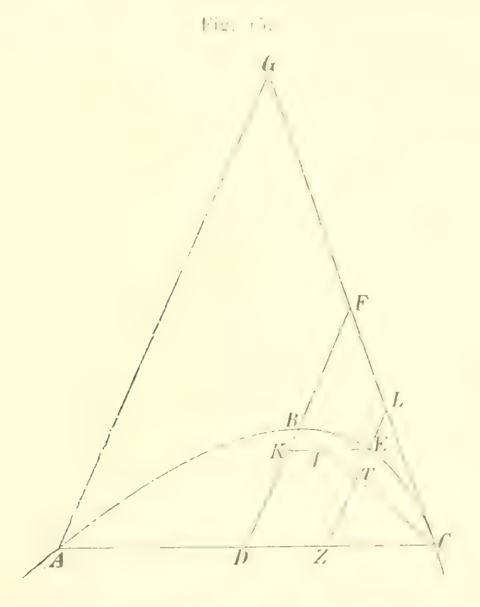
Sa méthode peut être indiquée brièvement comme il suit : si l'on prend la corde AC (dont nous désignerons la longueur par a) pour axe des abscisses et, pour axe des ordonnées, le diamètre AG, passant par l'une des extrémités A de la corde; si l'on désigne en outre par x et y les coordonnées d'un point E de la parabole, par y_1 l'ordonnée ZL, corres-

pondant à l'abscisse x, de la tangente CG à l'autre extrémité de la corde : Archimède déduit d'abord, des théorèmes déjà connus sur la parabole, que,

$$a \cdot y = x \cdot y_1.$$

L'ordonnée y_1 a donc, dans la position qu'elle occupe réellement, le même moment, par rapport à la ligne AG, qu'aurait l'ordonnée y si on la déplaçait parallèlement à elle-même jusqu'en C. Par une division de la figure en *stries*, au moyen de

Fig. 15.



parallèles à l'axe des ordonnées, et par une application de la démonstration par exhaustion qui établit la justesse de l'opération qu'on exprimerait à présent par

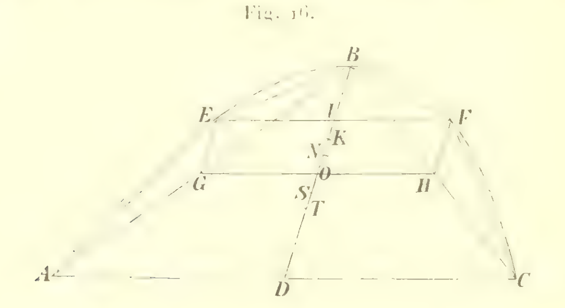
$$a \int_0^a y\, dx = \int_0^a y_1 x\, dx,$$

Archimède démontre que le moment, par rapport à AG, du segment entier de parabole transféré en C, est le même que le moment du triangle ACG dans sa position naturelle. Maintenant, comme la distance à AG du centre de gravité du

triangle ACG est le tiers de celle du point C, il en résulte que le segment est le tiers du triangle ACG, ou les deux tiers du triangle limité par la corde et par les tangentes en leurs extrémités. — Dans le détail de sa démonstration, Archimède imagine d'ailleurs la parabole comme suspendue à l'*autre* extrémité d'un levier à bras égaux ayant son point d'appui en A.

Malgré la rigueur de cette démonstration, Archimède y joint cependant encore une démonstration géométrique particulièrement élégante. Soient AEBFC le segment, et BD le diamètre qui partage en deux la corde AC : on inscrit d'abord le triangle ABC dans le segment donné, puis les

Fig. 16.



triangles AEB et BFC dans les segments formés, des triangles correspondants dans les nouveaux segments, etc.: on trouve facilement alors que chaque élément (comme AEB) d'une nouvelle série de triangles est égal à $\frac{1}{8}$ d'un triangle (tel ABC) de la série précédente, et comme il y a dans chaque série nouvelle un nombre de triangles double de celui des triangles de la série antérieure, on obtient

$$\text{Segment ABC} = \left[1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \ldots\right] \Delta\,\text{ABC} = \tfrac{4}{3}\,\Delta\,\text{ABC}.$$

La démonstration se fait ici par exhaustion, ainsi que nous l'avons indiqué à propos du douzième Livre d'Euclide.

Tandis que, chez Archimède, la quadrature géométrique de la parabole repose en fait sur la sommation d'une série infinie, nous avons employé de notre côté, dans la reproduction de sa démonstration *mécanique*, les signes d'intégrales pour désigner une décomposition en portions qui diminuent simultanément à l'infini. Cependant, en toute précision, on ne

saurait donner ici le nom d'*intégration* au procédé d'Archimède; car il sert, au contraire, à éviter une intégration en ramenant simplement la recherche proposée à une autre, dont le résultat, il est vrai, a été trouvé auparavant sans intégration, à savoir à la détermination du centre de gravité d'un triangle.

Il s'agit, en revanche, d'*intégrations véritables* dans le Traité *Sur les Spirales* et dans celui *Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes* : Archimède y établit, en effet, des théorèmes qui correspondent exactement à nos formules

$$\int_0^a x\,dx = \tfrac{1}{2}a^2, \qquad \text{et} \qquad \int_0^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}a^3,$$

et les applique à diverses déterminations géométriques que l'on obtiendrait aujourd'hui de la même manière que lui à l'aide des formules intégrales ci-dessus — sauf pour ce qui est de répéter la démonstration par exhaustion à propos de chaque question particulière. Parmi ces théorèmes, le premier se trouve dans l'Introduction au *Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes*, le deuxième dans un corollaire au théorème 10 sur les spirales : ce sont les suivants :

$$\frac{n^2}{2}h < h + 2h + 3h + \ldots + nh < \frac{(n+1)^2}{2}h,$$

$$\frac{n^3}{3}h^2 < h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + (nh)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}h^2.$$

Le premier résulte directement de la sommation des termes d'une progression arithmétique que l'on connaissait certainement depuis longtemps; le deuxième repose sur une sommation (faite dans le théorème 10) de la série en question. Archimède trouve que

$$3[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + (nh)^2]$$
$$= (n+1)(nh)^2 + h(h + 2h + 3h + \ldots + nh) ;$$

h, $2h$, etc., sont figurés par des segments, et si nous considérons h comme unité et que nous désignions par s la somme cherchée des carrés, la démonstration peut se traduire de la

manière suivante :

$$\begin{aligned}(n+1)n^2 &= n^2+[(n-1)+1]^2+[(n-2)+2]^2+\ldots\\&\quad+[2+(n-2)]^2+[1+(n-1)]^2+n^2\\&= 2.s+2.(n-1)+4(n-2)+6.(n-3)+\ldots\\&\quad+2(n-1).1.\end{aligned}$$

En ajoutant

$$(n+n-1+n-2+\ldots+1)$$

on obtient

$$2s+n+3(n-1)+5(n-2)+\ldots+(2n-1).1.$$

Or cette quantité est égale à $3s$: cela découle nettement de la sommation des équations suivantes, dont la justesse elle-même résulte de la formule qui donne la somme des termes d'une progression arithmétique,

$$\begin{aligned}n^2 &= n+2(n-1+n-2+\ldots+1),\\(n-1)^2 &= n-1+2(n-2+n-3+\ldots+1),\\(n-2)^2 &= n-2+2(n-3+n-4+\ldots+1),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'ailleurs, bien que secondaire en apparence, la sommation des termes en $h^2+(2h)^2+\ldots$ est un résultat algébrique important dans l'investigation d'Archimède.

Dans son *Traité des Spirales*, il applique ce produit au calcul d'un secteur de spirale d'Archimède $r = a.\theta$; la surface d'un pareil secteur étant

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\theta = \frac{1}{2a}\int_{r_0}^{r_1} r^2 dr,$$

elle pourra donc se trouver à l'aide de la seconde des intégrales que nous venons d'écrire. Archimède détermine de la manière suivante son rapport à un secteur circulaire de rayon r_1 : en même temps que les secteurs, il divise l'angle $\theta_1-\theta_0$, construit alors deux séries de secteurs circulaires qui sont enfermés par des secteurs de spirale, ou les renferment, puis il fait la comparaison avec ces secteurs circulaires en employant la démonstration par exhaustion.

Par *conoïdes* il désigne, soit des paraboloïdes de révolu-

tion, soit des hyperboloïdes de révolution à deux nappes dont une seule, toutefois, est utilisée; les *sphéroïdes* sont des ellipsoïdes de révolution. Dans le Traité de ces surfaces, Archimède détermine le volume de segments limités par un plan quelconque; il connaît la nature d'une section plane arbitraire pratiquée sur une surface de cette espèce, et le moyen d'en déterminer aussi les axes à l'aide des segments pratiqués par le plan sur le diamètre conjugué de la surface; de plus, il trouve la surface d'une ellipse, chose facile, il est vrai, si l'on veut comparer les figures décrites dans l'ellipse et dans le cercle construit sur l'un des axes de l'ellipse comme diamètre.

Les déterminations de volume se ramènent aux intégrations qu'Archimède connaissait sous une autre forme.

Les deux Ouvrages que nous venons de citer ne sont pas seulement remarquables par leur étude des surfaces et des volumes : sous un bien autre rapport, d'après ce que nous en avons dit, il est aisé de voir que le *Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes* fournit encore des éclaircissements sur la connaissance que possédait Archimède des sections coniques; de même, dans le *Traité des Spirales*, se trouvent quelques-unes des *intercalations* précédemment mentionnées.

Avec le calcul des surfaces, une autre question infinitésimale se rattache encore au but principal de ce Traité : à savoir la détermination des tangentes aux spirales. Pour cela, — bien entendu sous le contrôle obligatoire d'une démonstration par exhaustion, — Archimède considère le même triangle infinitésimal que l'on emploie maintenant pour les tangentes à des courbes exprimées en coordonnées polaires : comme résultat, la sous-tangente polaire est égale à $r.\theta$. D'ailleurs, les sous-tangentes aux extrémités des différentes spires complètes offraient pour lui un intérêt particulier, auquel nous avons déjà fait allusion page 63, puisqu'elles sont des représentations rectilignes de circonférences.

Mais, sans doute, la détermination (*la Sphère et le Cylindre*) de la surface sphérique est le résultat le plus important que nous devions à Archimède dans le domaine des intégrations, et ne s'écarte pas sensiblement de nos Traités élémentaires :

il aboutit à démontrer notamment, comme l'indique le titre de l'Ouvrage, que les zones de la sphère et les portions correspondantes de la surface courbe du cylindre circonscrit sont égales. Partant de là, on arrive facilement à d'autres formes de déterminations et, de même, à celles des volumes de la sphère, du secteur et du segment.

Archimède, pas plus qu'Euclide d'ailleurs, n'introduit jamais aucune unité, de sorte que ces derniers calculs consistent essentiellement dans la construction de cylindres et de cônes égaux aux volumes cherchés.

Le second Livre du même Ouvrage (en dehors de la détermination du volume des segments, que nous venons de citer) traite différents problèmes sur ces mêmes volumes, entre autres celui-ci : Partager une sphère, par un plan, en deux segments qui soient dans un rapport donné, et l'on sait que la solution de cette question dépend d'une équation du troisième degré. C'est bien aussi à une équation de cet ordre qu'Archimède ramène le problème en lui donnant la forme suivante : Partager par un point X un segment DZ, sur lequel les points B et T sont donnés, de telle sorte que

$$DB^2 : DX^2 = XZ : TZ.$$

DB est ici le diamètre $2r$ de la sphère, sur le prolongement duquel on rapporte $BZ = r$; DX est la hauteur de l'un des segments, et si ce dernier est avec l'autre dans le même rapport que $m : n$, alors

$$TZ = \frac{m}{m+n} \cdot r.$$

Archimède promet de résoudre cette équation plus tard, et il fait seulement remarquer, pour l'instant, que la condition de possibilité exigée pour l'équation se trouve effectivement remplie dans le problème actuel sur la sphère. Une des raisons de cet ajournement, par suite duquel la solution manque malheureusement dans notre texte, pourrait bien avoir été qu'Archimède, dans le même Livre, avait à faire une autre application de cette même équation : la dernière proposition du Livre (la neuvième) dit, en effet, que le plus grand segment de sphère ayant une surface courbe donnée est une demi-sphère ; or on

aperçoit clairement, à la démonstration qui en est donnée et qui, du reste, est incomplète dans le texte conservé, qu'elle ne fut faite qu'après que le résultat eût été trouvé déjà d'une autre manière.

Au contraire, la déduction véritable du théorème en question avait naturellement sa place dans l'addition que promet Archimède à propos de la division de la sphère; car en effet, chez les Grecs, un théorème comme le neuvième, relatif à un maximum, intervient toujours à titre de diorisme pour un problème : dans le cas actuel, il devait avoir pour but de trouver un segment de sphère dont le volume et la surface courbe fussent donnés — problème qui est précisément résoluble au moyen de l'équation donnée ci-dessus.

Maintenant, nous avons dit que l'addition promise ne se trouve point dans notre texte : on suppose, néanmoins, qu'elle était contenue dans un autre vieux manuscrit, découvert et publié en partie par un commentateur d'Archimède, Eutokius, et dans lequel l'équation d'Archimède est résolue à l'aide de sections coniques; on y déduit alors des conditions de possibilité dont l'application au problème « Trouver un segment de sphère de volume donné et de surface courbe donnée », fournirait directement la proposition 9. Nous donnerons ultérieurement cette solution elle-même, car elle nous est un des meilleurs types conservés de la façon dont les anciens traitaient les problèmes dits *solides*.

On voit déjà, par de tels exemples contenus dans le Traité d'Archimède, que la détermination de la surface sphérique ouvre un vaste champ à d'autres recherches : elle permet encore des applications pratiques, ainsi qu'à d'autres sciences, comme la Géographie.

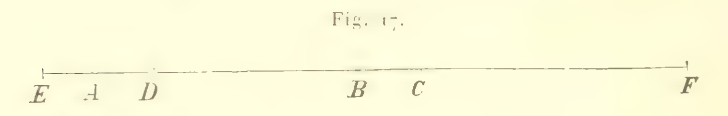
Ces circonstances contribuèrent, certes, à ce que cette détermination l'emportait aux yeux d'Archimède lui-même sur toutes ses autres découvertes; mais il faut dire aussi qu'il y avait pourtant une raison suffisante déjà dans ce fait qu'il put ainsi calculer l'aire d'une surface courbe non développable, à une époque où le calcul des surfaces planes elles-mêmes, et des volumes, était encore si peu avancé. Et combien sont rares, même de nos jours, les surfaces dont on puisse représenter les aires d'une manière assez simple !

D'après le vœu d'Archimède, on plaça sur sa tombe un monument qui contenait une sphère avec un cylindre circonscrit. Un siècle et demi après, Cicéron, lorsqu'il était questeur en Sicile, retrouva et restaura ce monument.

22. — Théorie de l'équilibre par Archimède.

Les règles de l'équilibre d'un levier à bras inégaux étaient connues bien avant l'époque d'Archimède, mais c'est chez

Fig. 17.



lui qu'on les trouve véritablement établies, pour la première fois, et voici brièvement la marche suivie :

Soient A et C les points d'application des poids P et Q, et soit B le point déterminé sur AC, de telle sorte que

$$AB : BC = Q : P.$$

Le levier, dont on néglige le poids propre, est alors en équilibre s'il est appuyé en B : en effet, divisons le levier par un point D tel que

$$AD : DC = P : Q,$$

et déterminons les points E et F, sur son prolongement, de telle sorte que EA = AD et CF = DC; on peut, sans changer les conditions d'équilibre, répartir uniformément le poids P sur ED, et celui de Q uniformément sur DF, de sorte que le poids total P + Q se trouve uniformément réparti sur EF. Grâce à la symétrie, l'équilibre existe alors si EF est appuyé au point médian B.

Toutefois, au premier Livre de son écrit *Sur l'Équilibre des figures planes*, Archimède fait cette démonstration sans recourir à une répartition continue : il s'occupe d'abord du cas où P et Q sont commensurables et, par conséquent, peuvent se répartir sur des points également distants, puis il passe, à l'aide de la démonstration par exhaustion, au cas où P et Q sont incommensurables. Comme de coutume, il établit expres

sément les hypothèses sur lesquelles se fonde sa démonstration : et ces hypothèses sont précisément les conditions d'équilibre, ou de non-équilibre, du levier à bras égaux.

En raison de ce qui va suivre, Archimède établit encore les hypothèses suivantes : Les centres de gravité de figures semblables sont des points homologues ; le centre de gravité d'une figure dont la convexité se tourne partout vers l'extérieur tombe nécessairement à l'intérieur du périmètre, ou de la surface qui limite cette figure. D'ailleurs, la façon dont il prouve que le centre de gravité d'un triangle est au point d'intersection de ses médianes nous paraît aujourd'hui inutilement prolixe, et c'est par là qu'il termine son premier Livre : mais la raison même de cette prolixité, c'est qu'il ne lui fallait bâtir sa démonstration que sur les hypothèses qu'il avait expressément établies.

Nous avons déjà vu comment Archimède utilise les théorèmes sur l'équilibre pour établir la surface d'un segment de parabole ; plus tard, dans le deuxième Livre de son Traité *Sur l'Équilibre des figures planes*, il va trouver le centre de gravité d'un tel segment, et cette détermination repose sur un théorème suivant lequel les centres de gravité de différents segments de parabole doivent diviser leurs diamètres respectifs dans le même rapport : on le démontre en décomposant les segments de parabole en un nombre infini de triangles, subdivision qu'Archimède employa dans sa détermination *géométrique* [1] de la surface du segment (*cf. fig.* 16, p. 148).

Quant à la valeur, inconnue jusqu'ici, de ce rapport constant, elle peut s'obtenir par la décomposition du segment ABC dans le triangle ABC avec deux nouveaux segments : Archimède résout sous forme géométrique l'équation du premier degré que l'on engendre ainsi.

Il connaît encore un autre centre de gravité, celui d'un segment quelconque de *paraboloïde de révolution*, bien que celui-ci ne se trouve point cependant de la même manière que le centre de gravité du segment de parabole : cette détermina-

(1) Dans le septième paragraphe du texte conservé, quelque éditeur postérieur, par une méprise évidente, a restreint la conclusion de la démonstration aux seuls segments semblables.

tion doit, en effet, sous une ou l'autre forme, dépendre effectivement des *intégrations* déjà mentionnées et que connaissait Archimède. Personnellement, pourtant, il ne nous explique en aucune manière comment il en vint à connaître ce centre de gravité, mais il en parle et s'en sert à différentes reprises dans le second Livre de son écrit *Sur les Corps flottants.*

C'est dans le premier Livre de cet Ouvrage d'Hydrostatique qu'est établi le fondement du théorème capital et bien connu sur l'équilibre des corps immergés, totalement ou en partie, propriété connue de nos jours sous le nom de *principe d'Archimède*; au reste, ici même, Archimède se place à un point de vue suffisamment général pour pouvoir prendre égard à la forme arrondie de la terre et à la direction centrale de la pesanteur.

C'est ce qu'il fait en étudiant, dans la dernière proposition du Livre, la situation d'équilibre d'un segment de sphère partiellement immergé; mais certaines parties essentielles de cette recherche ont malheureusement été perdues. Lorsqu'il veut établir qu'il n'existe point d'autres positions d'équilibre en dehors de celle où l'axe du segment est vertical, Archimède ne doit certainement pas se contenter simplement des raisons de symétrie; du moins, c'est ce que nous pouvons présumer en voyant, dans le deuxième Livre, le traitement plus complet auquel il soumet cette question : Trouver les positions d'équilibre du segment déterminé par une coupe perpendiculairement à l'axe dans un paraboloïde de révolution. Dans cette étude la surface de l'eau est supposée plane, et il recourt également aux centres de gravité de segments formés par des plans obliques sur l'axe.

En Statique, les travaux d'Archimède constituent le fondement, aussi bien de la Mécanique théorique que des applications pratiques de la Mécanique : il alla lui-même assez loin dans les applications, si nous en croyons maints récits postérieurs d'auteurs antiques, beaucoup plus sensibles aux résultats matériels qu'à un travail de science pure; l'emploi du poids spécifique pour déterminer la composition des alliages (*Couronne d'Hiéron*) est une application directe du principe d'Archimède : il aurait, dit-on, construit des appareils pour mouvoir de grandes masses avec une faible force; la vis, dite

d'Archimède, est bien une de ses inventions. Son habileté en mécanique trouva particulièrement à se manifester dans la construction des machines de guerre, durant le siège de Syracuse; mais, hâtons-nous de le dire, s'il n'est pas impossible qu'il ait inventé des miroirs paraboliques, leur emploi pour incendier la flotte romaine n'en est pas moins une pure légende.

Enfin, dans l'antiquité, on parlait avec une grande admiration d'un *planetarium* mécanique qu'aurait construit Archimède.

23. — La théorie des sections coniques avant Apollonius.

Nous avons déjà dit (p. 71), à propos du *problème délien*, ainsi que lors de la *construction de deux moyennes proportionnelles*, que cette question fut résolue par Ménechme, disciple d'Eudoxe, à l'aide des points d'intersection entre deux des courbes

$$ay = x^2, \quad bx = y^2, \quad xy = ab,$$

courbes qu'il représentait, d'ailleurs, comme des sections planes d'un cône de révolution; conformément à cette tradition, il est naturel d'attribuer à Ménechme l'invention des sections coniques. On sait en outre que, pour les imaginer, du moins jusqu'à Apollonius, on employait un plan perpendiculaire à une génératrice de la surface du cône : aussi les ellipses, paraboles et hyperboles prenaient-elles les noms de *sections de cône à angle aigu, droit, obtus*.

Ménechme et les mathématiciens antérieurs à Apollonius avaient-ils donc connaissance de quelque procédé particulier pour déterminer les propriétés de sections perpendiculaires à une génératrice? Était-il impossible, avec la même facilité, d'appliquer cette méthode à prouver que les sections différemment situées possédaient exactement les mêmes propriétés? Ce serait aller certainement trop loin, et l'on ne peut conclure de la sorte, car il n'existe aucune trace d'un tel procédé dans les Mathématiques grecques : il serait, du reste, difficile de l'inventer, au moins en ce qui concerne l'ellipse et l'hyperbole.

Mais nous pouvons proposer d'expliquer cette anomalie

de la manière suivante : Pour déterminer les deux moyennes proportionnelles, on pouvait se servir des courbes définies par les équations ci-dessus; or, nécessairement, une telle définition devait alors être accompagnée d'un postulat affirmant que ces courbes existaient réellement, ou, en d'autres termes, que les points déterminés par cette définition se succédaient d'une façon continue. Toutefois, cette nécessité pouvait être évitée lorsqu'il était possible de donner pour ces courbes une construction fondée sur des postulats antérieurs : bien plus, il eût été même inadmissible, en ce cas, d'instituer de nouveaux postulats. Et, précisément, la construction que trouve Ménechme consiste à déterminer lesdites courbes comme sections de cônes circulaires; la continuité de la surface conique est alors assurée par celle de la courbe directrice, le cercle, et la continuité de la courbe de section l'est à son tour par celle de la surface du cône.

Pour cet usage, toute manière de produire ces courbes comme sections de cône circulaire est également bonne; et s'il faut s'assurer qu'une courbe, dont on connaît les constantes, peut être considérée comme une section d'un cône, le plus commode est même d'avoir des règles fixes pour la solution de ce problème. En prenant en même temps comme surface de cône celle d'un cône droit, et pour plan de section un plan perpendiculaire à une génératrice, on voit très facilement que la solution répond bien au but cherché si l'on veut considérer tout d'abord les sections paraboliques produites comme des sections du cône à angle droit.

Soient T le sommet, KTC une section suivant l'axe, GPH la trace d'une section parallèle au plan de base, y le segment intercepté sur une droite entre le point P et la surface du cône, droite qui se trouve perpendiculaire en P au plan de la figure :

Si AP ⊥ TK, on a, alors,

$$y^2 = \mathrm{GP}.\mathrm{PH} = \sqrt{2}.\mathrm{AP}.\mathrm{AI} = 2\,\mathrm{AP}.\mathrm{AL}.$$

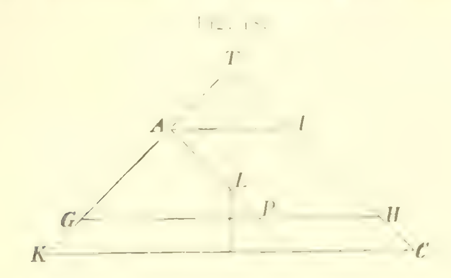
La section élevée en AP perpendiculairement au plan de la figure est alors représentée, si $\mathrm{AP} = x$ et $\mathrm{AL} = p$, par

$$y^2 = 2px;$$

et, conformément à cette construction, Archimède appelle

encore le demi-paramètre p la *portion jusqu'à l'axe,* c'est-à-dire depuis le sommet A de la parabole jusqu'à l'axe du cône.

Fig. 18.



On voit donc bien que Ménechme obtenait précisément la solution du problème proposé : représenter, comme section d'un cône, une courbe dont l'équation est $y^2 = 2px$. Il ne s'agissait que de rendre droit l'angle du cône, de situer la section perpendiculairement à une génératrice, et de faire en sorte que la *portion jusqu'à l'axe* fût égale à p.

La représentation correspondante pour l'ellipse et l'hyperbole, en tant que sections perpendiculaires à une génératrice dans un cône de révolution à angle aigu, ou obtus, offre les mêmes avantages : nous nous servirons, cette fois encore, des notations de la *fig.* 18, en y joignant seulement la désignation A_1 pour le point d'intersection de AP avec la seconde génératrice TC du plan de la figure ; dans le cas de l'hyperbole, c'est le point d'intersection de AP et du prolongement de TC au delà de T.

Si $AP = x$, $PA_1 = x_1$, et si, en outre et comme précédemment d'ailleurs, la *portion jusqu'à l'axe*, ou AL, est le demi-paramètre p et que $AA_1 = 2a$, on trouve

$$y^2 = \frac{2\,\mathrm{AL}}{\mathrm{AA_1}}\cdot \mathrm{AP.PA_1} = \frac{p}{a}\,x x_1.$$

Or cette détermination par l'équation rapportée aux axes, sous une ou l'autre forme (leur détermination se rapprochait plutôt de l'équation $\frac{y^2}{x x_1} = \frac{p}{a}$), est justement celle que les plus anciens géomètres grecs donnaient pour base à l'étude de l'ellipse et de l'hyperbole (selon que $x + x_1 = 2a$ ou que

$x_1 \quad x \quad 2a)$: les *constantes* de la courbe étant représentées d'une façon simple dans la figure on a là, en fait, une bonne et sûre méthode pour représenter ces courbes comme sections de cônes, et l'on montre bien ainsi qu'elles sont des sections coniques pour toutes les valeurs des constantes.

Néanmoins, notre explication implique que ces courbes fussent déjà connues auparavant et représentées, bien entendu, sous forme géométrique, par l'équation mentionnée plus haut ; il paraît, en effet, probable que l'ellipse, en particulier, ait été connue, et puisse fort bien avoir été considérée comme section de cylindre.

Nous avons déjà dit que l'on avait trouvé l'application de l'hyperbole à la construction de deux moyennes proportionnelles, notamment pour l'hyperbole équilatère, bien que, il est vrai, on la déterminât à l'aide d'une autre équation, en la rapportant à ses asymptotes. Pour rechercher alors si cette courbe n'était pas déjà connue d'une autre manière, par exemple n'était pas un cercle, l'application à la construction des deux moyennes proportionnelles offrit tout d'abord une excellente occasion de transformer la détermination primitive à l'aide des moyens dont on disposait, c'est-à-dire à l'aide de l'Algèbre géométrique ; la transformation en équation aux axes est un résultat assez facile à obtenir par ces procédés, mais il est peu vraisemblable que l'on ait vu une connexion directe entre l'équation par rapport aux asymptotes et la représentation comme section conique.

Grâce aux sections perpendiculaires à une génératrice, on parvint donc à représenter toute parabole, ellipse ou hyperbole, comme section d'un cône de révolution. Bien entendu, la réciproque apparut également vraie : à savoir que toutes les sections ainsi pratiquées sont des paraboles, des ellipses ou des hyperboles ; et il nous semble fort impossible qu'on ait négligé de faire la remarque que, dans cette dernière détermination, la position particulière du plan sécant ne joue absolument aucun rôle.

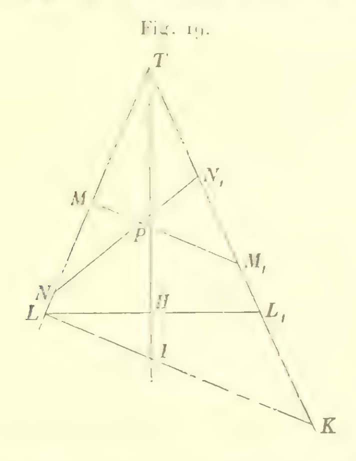
En tous cas, la même méthode devait apparaître applicable dès qu'il fut question des autres genres de sections, comme cela nous est confirmé par l'Ouvrage d'Archimède sur les conoïdes et sphéroïdes ; car, dès l'introduction, cet écrit montre

que, déjà avant Archimède, on connaissait au moins toutes les sections elliptiques des cônes droits et, au cours des idées, on y considère même parmi les sections elliptiques de cônes circulaires obliques celles qui sont perpendiculaires au plan de symétrie du cône. Archimède résout même le problème qui s'énoncerait dans notre langage : *Détermination des sections circulaires d'une surface conique du second ordre à sections principales connues;* et comme, dans ses problèmes, il n'a aucun besoin de sections hyperboliques situées comme nous l'avons dit, son silence à leur égard ne permet nullement de conclure qu'il les ignorât.

Archimède trouve encore l'occasion de nous apprendre par quel moyen il découvrit la détermination planimétrique des sections planes des cônes circulaires.

Considérons la *fig.* 19 où le cône est coupé suivant un plan

Fig. 19.



de symétrie (section quelconque comprenant l'axe, si le cône est droit); soient TL et TK les génératrices situées dans ce plan, LK la trace du plan de la base circulaire. La nature de la section plane, projetée en NN_1, pourra être appréciée au moyen du lemme planimétrique suivant : si les droites NN_1 et MM_1, qui coupent les lignes droites fixes LT et TK en M, N, M_1 et N_1, et qui se rencontrent elles-mêmes en P, conservent une direction invariable, le rapport $\frac{PM.\,PM_1}{PN.\,PN_1}$ est

constant — soit k la valeur de ce rapport. Si, maintenant, MM_1 est la trace d'une section parallèle à la base et que y soit la portion comprise, sur la droite projetée en P, entre P et la surface du cône, on a

$$y^2 = PM.PM_1 = k.PN.PN_1,$$

et c'est là précisément la propriété par laquelle nous avons caractérisé, soit une ellipse, soit une hyperbole.

Le théorème planimétrique dont on se sert ici est supposé connu : on l'employait donc certainement avant Archimède pour déduire les propriétés des sections coniques. Or, d'après le théorème dit *de puissance* dont nous parlerons plus tard et que connaissait également Archimède, le théorème planimétrique reste valable quand bien même les points M, N, M_1, N_1 sont situés sur une section conique quelconque; par conséquent, dans l'écrit mentionné sur les surfaces de révolution du second ordre, Archimède pouvait déterminer absolument de la même manière les sections planes de ces surfaces.

Lorsque nous avons admis que la découverte faite par Ménechme consista, essentiellement, dans la représentation de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole comme des sections coniques, nous dûmes supposer en même temps que ces courbes avaient été étudiées auparavant, partiellement du moins, et notamment à propos du problème délien, et que l'on avait pris pour point de départ de cette recherche les propriétés mêmes que nous exprimons aujourd'hui par leurs équations les plus simples.

Cette hypothèse se corrobore fortement au reste par cette circonstance que, chez tous les écrivains grecs, ce sont les propriétés planimétriques principales que l'on trouve à la base des recherches continuées, et non point la représentation en sections coniques; et l'hypothèse contribue, de plus, à expliquer que la théorie des sections coniques se soit développée chez les Grecs avec la rapidité qu'elle devait acquérir aussitôt après Ménechme.

D'ailleurs, l'intérêt éveillé par cette théorie dut bientôt grandir lorsque l'on constata que les sections coniques ne sont pas seulement applicables à la construction des deux moyennes proportionnelles, comme chez Ménechme, mais encore à la

solution de nombreux autres problèmes qu'on avait en vain tenté de résoudre avec la règle et le compas : pour cela, il fallait se servir des sections coniques en tant que lieux géométriques, *lieux solides* selon l'expression d'alors.

Le titre même, *Lieux solides*, du plus ancien Ouvrage cité sur les sections coniques, montre assez l'importance que l'on attachait à cet usage : ce livre, perdu, est d'un mathématicien, Aristée, contemporain d'Euclide et un peu plus âgé que lui, et son titre avait une signification particulière qui ne correspondait pas à une simple dénomination de la théorie générale des sections coniques : cela ressort nettement de ce que les livres d'Euclide sur ces courbes, parus bientôt après, devaient compléter, et non remplacer, les *Lieux solides* d'Aristée. On continua même d'étudier et d'employer cet écrit concurremment aux *Sections coniques* d'Apollonius, qui avaient totalement supplanté celles d'Euclide.

L'usage qu'Aristée fit vraisemblablement des sections coniques, et qui devait se répandre encore davantage quand la théorie en eut été développée par Euclide et par Apollonius, se comprendra principalement lorsque le grand Ouvrage d'Apollonius nous aura renseignés sur la manière dont les anciens traitaient ces courbes; en outre, si nous voulons bien observer quels sont les progrès personnels dus à Apollonius, nous pourrons acquérir une idée de ce que devait renfermer déjà l'exposé d'Euclide. En attendant, il est possible de reconnaître aux écrits d'Archimède qu'il devait y avoir là quelque chose d'assez important, puisque les théorèmes sur les sections coniques, qu'Archimède suppose connus, devaient nécessairement se trouver dans l'Ouvrage perdu d'Euclide : on y rencontrait donc, non seulement la relation déjà mentionnée entre les sections coniques et leurs axes, ainsi que la détermination des tangentes, diamètres conjugués et asymptotes, qui s'y rattache, mais encore la relation correspondante de ces sections à deux diamètres conjugués, ainsi que leur rapport aux asymptotes déjà connu de Ménechme; enfin, également, le théorème de la puissance dont nous avons parlé.

24. — Les sections coniques d'Apollonius.

Si donc c'est à Euclide que nous devons la connaissance de la Géométrie élémentaire des Anciens, de même c'est par le grand Ouvrage d'Apollonius que nous possédons principalement leur théorie des sections coniques ; et, cependant, parmi ses huit Livres sur cette matière, sept seulement nous ont été conservés, les quatre premiers en grec, les trois derniers par une traduction arabe.

Les quatre premiers Livres renferment ce qu'on nomme les *éléments de la théorie des sections coniques*, c'est-à-dire l'exposition, en un tout suivi, des propriétés principales de ces sections : c'est de là qu'il faut ensuite partir, aussi bien pour appliquer la théorie à la solution des problèmes de construction au moyen des lieux solides, que pour se livrer aux recherches particulières sur des questions concernant les sections coniques.

Les Livres suivants, au contraire, comportent des études spéciales : ainsi le cinquième Livre, traitant des *normales* aux sections coniques et de la construction des normales issues d'un point donné, est le type le plus complet qui nous soit conservé de l'application des sections coniques à des constructions, en même temps qu'un exemple de la subtile étude théorique que l'on savait rattacher à une telle construction.

Mais ce sont, directement et avant tout, les quatre premiers Livres qui nous font saisir la connaissance générale que possédaient les anciens sur les sections coniques : aussi nous arrêterons-nous assez longuement, non seulement pour pouvoir donner un aperçu de ce qu'ils savaient sur ces courbes, mais aussi pour faire sentir les ressources réelles dont ils disposaient pour aller jusqu'où ils atteignirent.

Voyons donc, tout de suite, comment le *premier Livre* établit le fondement de la théorie.

Quoique le point de départ diffère de celui dont s'étaient servis les prédécesseurs d'Apollonius, il résulte toutefois de son avant-propos que les propositions particulières qui composent ce fondement sont, en grande partie, les mêmes que

connurent et employèrent ces prédécesseurs. Cependant, pour ce qui est de l'hyperbole, Apollonius attache à ces propositions un progrès notable : bien qu'il nomme *hyperboles opposées* les deux branches de l'hyperbole, il les traite toutefois comme une courbe unique et obtient ainsi, dans les propositions sur l'ellipse et sur l'hyperbole, la ressemblance qui n'est possible qu'avec un tel procédé.

Ainsi la nouveauté du point de départ va se trouver localisée : au lieu de considérer les sections produites sur des cônes de révolution par des plans situés dans une position déterminée, Apollonius envisage tout de suite des *sections planes quelconques de cônes circulaires quelconques*; alors, pour rattacher à ces sections une propriété planimétrique telle qu'elle puisse servir de base à plus ample information des courbes, Apollonius emploie une généralisation du procédé même qui servait à Archimède pour l'étude de sections perpendiculaires au plan de symétrie du cône. Mais, de par cette extension, la propriété planimétrique devenait, elle aussi, plus générale, elle ne s'exprime pas en rapportant la section conique à l'un de ses axes et aux demi-cordes conjuguées pour axes coordonnés, car c'est celle même que l'on obtient de pareille manière en rapportant la courbe à un diamètre quelconque et à ses cordes conjuguées : c'est là ce qu'il faut bien retenir si l'on veut aisément suivre la marche du Livre.

Au début, on ne connaît donc que ceci sur les courbes cherchées : c'est qu'elles possèdent la propriété mentionnée, par rapport à un diamètre particulier et au système de cordes conjuguées qui forment, en général, un angle aigu avec ce diamètre. Ensuite, au cours de l'exposition, on voit qu'elles jouissent de la même propriété par rapport à un nombre infini de diamètres et, à la fin du Livre, on parvient à construire des *diamètres perpendiculaires à leurs cordes conjuguées*; on constate à ce moment que les courbes, une fois rapportées à ces diamètres, peuvent être considérées comme *sections dans un cône de révolution.*

Alors, seulement, l'identité est parfaitement manifeste entre les courbes traitées par Apollonius et les sections coniques que l'on envisageait auparavant.

Ces derniers résultats constituent donc le but essentiel qu'Apollonius eut devant les yeux en composant tout son premier Livre; mais, chemin faisant, parfois il fut contraint, parfois il chercha lui-même l'occasion d'exposer maintes propriétés qui pourraient trouver leur application dans les Livres ultérieurs ou qui, en soi, méritaient d'être connues : c'est ainsi que la théorie des *tangentes* et de leur détermination sert d'introduction à la thèse fondamentale du Livre, celle *des diamètres aux systèmes de cordes parallèles*.

Pour se faire une idée précise des tournures employées, le mieux est encore de les comparer à la *transformation algébrique* des équations, dans les formes nouvelles qu'on obtient par rapport à de nouveaux systèmes de coordonnées, transformation aujourd'hui usuelle en Géométrie analytique, ou peut-être de les comparer en général avec les *opérations algébriques* de la Géométrie analytique. Apollonius, lui, n'a recours qu'à l'*Algèbre géométrique*, qui est ici d'un emploi assez pratique : on peut sans peine le reconnaître en considérant la forme géométrique sous laquelle Apollonius représentait les équations des sections coniques qu'il avait déduites, au début, de considérations stéréométriques et, dans ces équations, nous avons déjà vu que les courbes sont rapportées à un diamètre et aux demi-cordes conjuguées pris pour axes coordonnés.

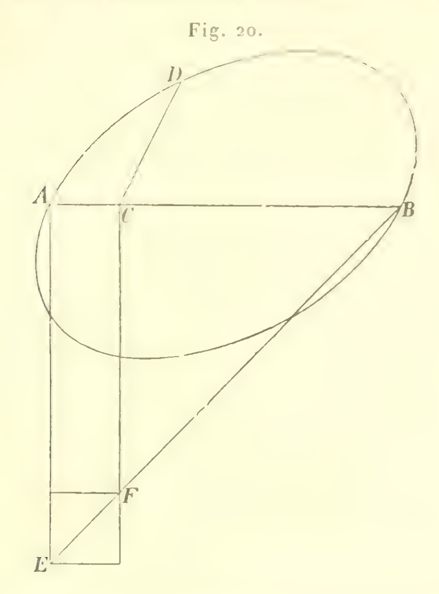
Soient (*fig.* 20-21) AB un diamètre $2a$ d'une ellipse ou d'une hyperbole, et CD la moitié d'une corde conjuguée : le carré CD^2 doit être dans un rapport constant $\frac{p}{a}$ avec le produit AC.CB, ce qui s'exprime en élevant en A et en C les perpendiculaires AE et CF sur AB, et en reportant sur la première $AE = 2p$. Si F est le point d'intersection de CF et de BE, le carré élevé sur CD sera égal au rectangle AF; car alors CF est précisément égal au produit $\frac{p}{a}\cdot$ CB.

La figure employée constitue donc l'appareil géométrico-algébrique à l'aide duquel on figure exactement ce que nous exprimerions par l'équation

$$y^2 = \frac{p}{a}\,x\,(2a \mp x),$$

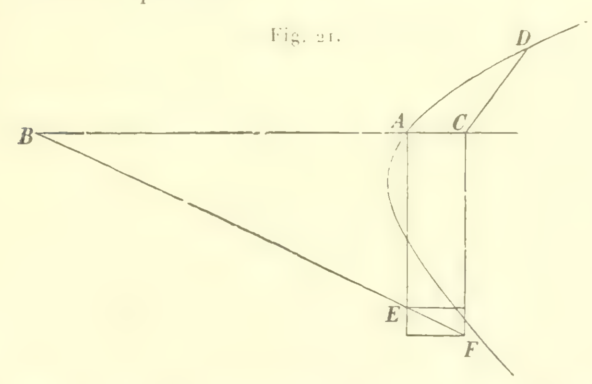
dans laquelle x et y figurent respectivement AC et CD, et l'on voit que la propriété fondamentale qui se trouve représentée de la sorte, est celle même que l'on connaissait avant Apol-

Fig. 20.



lonius : c'est à tort, par conséquent, qu'on lui donne le nom de *théorème d'Apollonius*.

Fig. 21.



La forme de cette représentation est d'ailleurs parfaitement adéquate aux formes ordinaires de l'algèbre géométrique,

mais elle prit une importance particulière par ce qu'elle a servi de base aux nouvelles dénominations qu'Apollonius devait donner aux sections coniques, une fois abandonnée la méthode de détermination à laquelle étaient attachées les anciennes désignations. La figure dont on se sert est la même, en effet, que celle qui correspond à la transformation de l'équation en

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2,$$

pour exprimer que le carré y^2 est appliqué sur le segment $AE = 2p$, de telle sorte que les côtés du rectangle, manquant ou en trop, soient dans le rapport $p : a$ (*cf.* 6e Livre d'Euclide); et, conformément aux notations employées dans la résolution des équations du deuxième degré, la courbe représentée est elle-même nommée *ellipse* ou *hyperbole*, selon que le rectangle EF manque, ou est en trop.

S'il n'y a ni défaut ni excès, on est alors en présence d'une simple application du carré y^2 sur $2p$: et la courbe $y^2 = 2px$, dans ce cas, a reçu le même nom de *parabole* que l'application simple de surface.

On voit que l'Algèbre géométrique rend, ici, exactement les mêmes services que ceux que rend plus tard l'Algèbre dans la Géométrie analytique : tandis que nous exprimons aujourd'hui la propriété fondamentale d'une courbe par une équation algébrique, Apollonius, lui, la représente par une figure; et, par le fait que cette figure auxiliaire est tracée à angle droit avec l'axe des abscisses, quand bien même les ordonnées coupent cet axe sous un autre angle, elle reste toujours, en quelque sorte, indépendante de la figure pour l'étude de laquelle elle doit servir.

De plus, comme l'équation algébrique de la courbe est du second degré par rapport à x, cette figure auxiliaire est bien la même que celle dont on se sert dans les éléments pour la représentation et la solution d'une équation du second degré : c'est donc précisément comme *courbes du second degré* que les sections coniques se trouvèrent si heureusement appropriées, ultérieurement, à la méthode des Anciens.

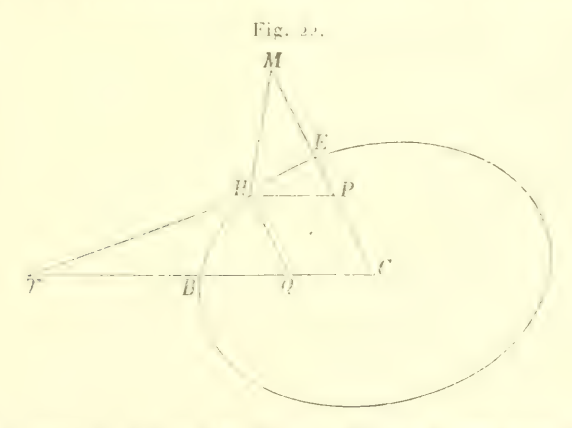
Toutefois, la forme géométrique que cette méthode don-

nait à l'Algèbre elle-même, fut cause de combinaisons multiples entre le moyen et l'objet de l'investigation géométrique, combinaisons qui devaient rester assez loin de la Géométrie analytique, notamment en tant que celle-ci devait transformer complètement les questions de géométrie en problèmes de calcul. Au contraire, le procédé antique ressemble davantage à l'emploi actuel de la Géométrie analytique, pour lequel on tient compte en même temps de la signification géométrique des transformations à opérer.

Sans doute, nous ne pouvons songer à suivre séparément toutes les transformations des équations de la courbe, représentées sous forme géométrique, et à l'aide desquelles, peu à peu, l'on atteint le résultat que nous avons dit être le but essentiel du Livre; mais nous devons néanmoins citer un moyen terme qui joue un rôle capital, tant ici que, plus tard, dans les questions du troisième Livre :

On considère une section conique de centre C et de diamètres CE et CB comme lieu géométrique de points H, *tels que le quadrilatère* CMHT, *limité par ces deux diamètres, par la ligne* HM *parallèle aux cordes conjuguées à* CB, *et par* HT *parallèle aux cordes conjuguées à* CE, *ait une superficie constante.*

Fig. 22.



Pour nous, ce *théorème de surfaces* est valable d'une façon générale, à condition toutefois, s'il intervient des quadrilatères impropres, d'attribuer le signe + ou — à chacune de

leurs parties, suivant leur situation par rapport au périmètre; Apollonius, au contraire, doit le décomposer en plusieurs théorèmes distincts, mais dont cependant il saisit parfaitement les rapports. On comprend alors l'application que fait l'auteur dans le premier Livre : il suffit en effet de remarquer que ce théorème se tire tout d'abord de l'équation qui rapporte la courbe à l'un des diamètres et à ses cordes et qu'il conduit ensuite, d'une manière correspondante, à l'équation où la courbe est rapportée à l'autre diamètre et à ses cordes.

Mentionnons encore, dans le premier Livre, la détermination des tangentes : d'après l'équation de la courbe il s'agit, pour cette opération, de mener par un point (x', y') de la courbe une droite dont les autres points (x, y) satisfassent à la condition

$$\frac{y^2}{2px \mp \frac{p}{a}x^2} > \frac{y'^2}{2px' \mp \frac{p}{a}x'^2},$$

condition dans laquelle, pour la parabole, $\frac{p}{a}$ se change en o.

Apollonius montre que, pour l'ellipse et pour l'hyperbole, on y parvient si la tangente et l'ordonnée au point (x', y') partagent harmoniquement le diamètre (l'expression harmonique est toutefois de date plus récente). La démonstration est trop étendue pour que nous la puissions reproduire, et nous allons nous contenter d'établir qu'une droite issue du point (x', y') de la parabole $y^2 = 2px$, et qui rencontre l'axe des abscisses au point $(-x', o)$, est tangente à la parabole, ce qui se fait à peu près comme il suit : (x, y) étant un point de cette droite, on a

$$\frac{y^2}{(x' + x)^2} = \frac{y'^2}{4x'^2};$$

maintenant, comme on sait par Euclide que la moyenne géométrique entre deux grandeurs est plus petite que leur moyenne arithmétique, ou que

$$x'x < \left(\frac{x + x'}{2}\right)^2,$$

il en résulte

$$\frac{y^2}{x} = \frac{y'^2}{x'}.$$

Quand on voit si bien l'excellence et la perfection du fondement posé par Apollonius dans son premier Livre, on comprend d'autant mieux qu'il puisse s'élever à une telle hauteur dans ses autres Livres, notamment le troisième et, en partie aussi, dans le cinquième.

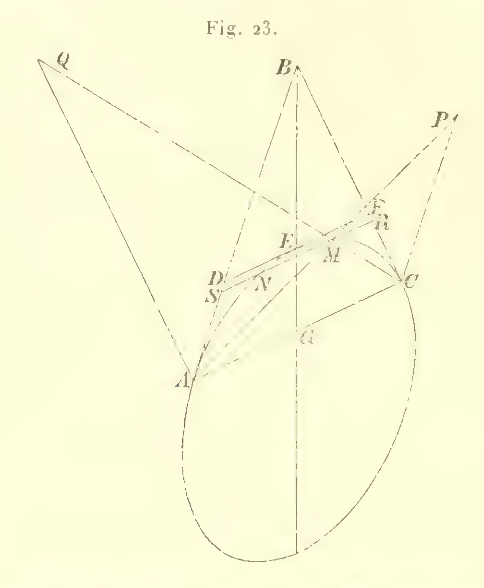
Nous devons ici nous contenter d'indiquer très brièvement la matière de ces différents Livres.

Dans le *second*, sont expliquées les propriétés principales des asymptotes et des diamètres conjugués : on y considère, outre les branches connexes d'une hyperbole, les *hyperboles conjuguées*, situées dans les différents angles formés par les mêmes asymptotes; on suppose que ces hyperboles ont des diamètres d'égale longueur, car, en effet, on attribue même aux diamètres ne coupant pas les courbes des longueurs qui, en réalité, sont les mêmes que celles dont nous nous servons actuellement. Divers problèmes sur les diamètres et les asymptotes sont encore résolus, notamment la construction du centre et des axes d'une section conique donnée, celle d'une tangente formant un angle donné avec le diamètre passant par le point de contact, etc.

Le *troisième Livre* traite, avant tout, des propriétés des points des courbes et indépendantes des diamètres et des axes : il les fait aisément résulter du *théorème de surfaces* déjà nommé et qui revient en réalité à rapporter la courbe à deux diamètres non conjugués. On conçoit qu'il doit aussi fournir un excellent point de départ pour la démonstration du théorème *de puissance* connu par Archimède : ce théorème concerne, en effet, des cordes de directions données, mais choisies arbitrairement. On y rencontre encore les principaux théorèmes sur les pôles et les polaires, ainsi que la génération d'une section conique par deux *faisceaux de droites* qu'on appelle aujourd'hui *projectifs* ou *homographiques :* les sommets des faisceaux sont des points quelconques A et C de la courbe, et les droites correspondantes AM et CM se déterminent par ce fait qu'elles interceptent,

sur les parallèles menées respectivement par C et A aux tangentes en A et C, des *portions* CP et AQ dont le rectangle possède une surface constante.

Fig. 23.



On aperçoit facilement que toutes ces propositions sont incomplètes, et même peu intelligibles, si l'on considère à part une branche unique de l'hyperbole : aussi comprend-on l'avantage réel qu'il peut y avoir à considérer les deux branches de courbe selon la conception originale d'Apollonius, notamment dans son troisième Livre, avantage qui subsiste sur tous les modes antérieurs de traiter le même sujet, quand bien même certaines propriétés eussent été connues avant lui sous forme plus restreinte.

Une autre série de propositions du même Livre contient les déterminations de tangentes les plus simples, sans emploi des points de contact, en particulier celle des tangentes à une hyperbole considérées comme droites qui, à partir du centre, segmentent sur les asymptotes des portions formant un rectangle de surface constante, et des tangentes à une ellipse et à une hyperbole, comme droites qui segmentent, sur des tangentes fixes et parallèles entre elles, et à partir des points de

contact de celles-ci, des portions formant un rectangle de surface constante. — Les tangentes à une parabole seront déterminées comme droites dont les points d'intersection parcourent, sur des tangentes fixes, des espaces proportionnels.

Nous pouvons encore faire remarquer ici que ces mêmes propositions nous éclairent sur le but de deux autres écrits d'Apollonius, sur la *section de raison* et sur la *section de l'espace*, dans lesquels il résout, au moyen de l'Algèbre géométrique, et — au moins dans celui sur la section de raison — discute, avec un souci des détails presque pénible, les problèmes que voici : « D'un point mener une droite qui, sur deux droites données, à partir de deux points donnés, détermine des segments qui soient dans un rapport donné, ou forment un rectangle de surface donnée. » La solution de ces problèmes à l'aide de la règle et du compas conduit effectivement, conformément aux théorèmes mentionnés du troisième Livre sur les sections coniques, à la détermination de la tangente menée par un point extérieur donné à une section conique suffisamment déterminée.

Ce même troisième Livre comprend également une petite subdivision remarquable, à savoir, la théorie des foyers de l'ellipse et de l'hyperbole traitée par la Géométrie élémentaire : la position de ces foyers, F et F_1, sur l'axe principal AA_1, s'obtient par ce fait que le rectangle $AF.FA_1$ doit être égal à ap, où $2a$ et $2p$ désignent les longueurs de l'axe et du paramètre. Au moyen de la détermination dont nous venons de parler pour les tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole, on trouve alors que le segment que les tangentes en A et A_1 déterminent sur une tangente mobile est vu des points F et F_1 sous un angle droit ; après quoi l'on obtient facilement les autres théorèmes principaux.

Chose étonnante, Apollonius ne dit rien sur le foyer de la parabole ; mais, il est vrai, les lemmes apportés par Pappus à un ouvrage perdu d'Euclide permettent de supposer que ce point était, partiellement au moins, connu d'Euclide.

Le *quatrième Livre* détermine le *maximum* du nombre des points d'intersection de deux sections coniques : Apollonius dit expressément, dans l'avant-propos, que le progrès réalisé par lui consiste essentiellement dans le fait d'avoir égard aux

deux branches de l'hyperbole, circonstance qui joue ici un rôle capital; et nous parlerons plus en détail du *cinquième Livre* lorsque nous exposerons comment les Anciens traitaient les problèmes solides.

Le *sixième Livre* traite, d'une part, des *sections coniques semblables*; d'autre part, il contient quelques extensions des constructions relatives aux cônes qui passent par des sections coniques données, constructions qui avaient été entreprises dans le premier Livre.

Le *septième Livre* réunit un assez grand nombre d'expressions pour certaines fonctions entre les longueurs des diamètres conjugués, des paramètres, etc.; on y trouve d'importantes propositions, telles que les suivantes : la constance de la surface du triangle formé par deux diamètres conjugués et par la corde qui joint leurs extrémités (dans le cas de l'hyperbole, les deux diamètres conjugués en question ne sont autres que des diamètres d'hyperboles conjuguées); l'invariabilité de la somme ou de la différence des carrés de diamètres conjugués — pour d'autres cas, où de telles fonctions ne sont pas constantes, on en recherche les valeurs maxima et minima.

Enfin, le septième Livre renferme les démonstrations relatives aux diorismes des problèmes qui devaient être résolus dans le *huitième Livre*, actuellement perdu; c'est au moins ce qui est annoncé dans l'avant-propos, ce qui nous permet d'induire que ces problèmes avaient pour but de trouver des diamètres conjugués pour lesquels ces fonctions eussent des valeurs données; alors, les expressions trouvées pour ces fonctions dans le septième Livre fournissaient immédiatement les équations nécessaires à la solution des problèmes. C'est dans ce sens que le Livre a été restitué par Halley.

25. — Lieux et problèmes solides.

Comme nous l'avons indiqué déjà, le but primitif de la théorie des sections coniques était d'établir des lieux géométriques susceptibles de conduire à la solution des questions pour lesquelles la droite et le cercle étaient devenus insuffisants : les problèmes qui se résolvent à l'aide de la droite et

du cercle s'appellent *problèmes plans*, en même temps que la droite et le cercle, en tant que lieux géométriques, s'appellent *lieux plans*. A une époque plus récente de l'antiquité, on supposait que ce dernier nom est le nom primitif, parce que l'on déterminait initialement les lignes en question (droite et cercle) comme étant situées dans un plan; mais, à côté d'une telle origine, il est tout aussi vraisemblable d'admettre que la dénomination de *plans* appartenait primitivement à des problèmes qui dépendent d'équations du second degré, au plus, et qui, par conséquent, sont représentés en Algèbre géométrique, — dans le plan, — par des relations entre surfaces.

Cela étant, la dénomination de *problèmes solides* devait s'appliquer à la même époque à des problèmes qui dépendent d'équations du troisième degré, et s'expriment par des relations entre parallélépipèdes; quant aux *lieux solides*, ils désignent les lieux géométriques représentés par des sections coniques, et l'on peut admettre que leur nom vient de ce qu'ils étaient destinés à la solution de problèmes solides. Dès l'antiquité, pendant une époque plus récente, on admettait toutefois que la dénomination de *lieux solides* est antérieure, au contraire, et qu'elle provient de la définition stéréométrique des sections coniques.

Malheureusement l'ouvrage d'Aristée est perdu : les sections coniques y étaient sans doute particulièrement traitées comme lieux géométriques, et nous ne savons rien des ouvrages postérieurs qui poursuivirent le même but.

Cependant, puisque la théorie des sections coniques d'Apollonius traite le même sujet à un autre point de vue, on peut en conclure les *lieux solides* que l'on connaissait ou, du moins, que l'on pouvait trouver aisément dès qu'il y avait lieu de les appliquer dans un problème : dès le premier Livre d'Apollonius, on voit que cela dut être le cas lorsque certaines lignes données apparaissaient immédiatement comme diamètres conjugués, et même pour des propriétés plus compliquées : en effet, dans le théorème des surfaces, on rapporte la courbe à deux diamètres non conjugués.

Mais le troisième Livre nous fait pénétrer plus avant, grâce à son caractère plus général et, aussi, par ce fait qu'Apollonius indique expressément son but : la manière particulière

de ce Livre, perfectionnée, sans nul doute, par l'introduction des deux branches de l'hyperbole, permet, selon Apollonius lui-même, de suppléer aux défauts de l'ancienne détermination des lieux solides. A cet effet, le *lieu à trois ou quatre droites* est mentionné d'une façon expresse : si x, y, z, u désignent les distances d'un point à quatre droites fixes, distances mesurées sur des obliques de directions données, et que K représente une constante, le lieu à quatre droites s'exprimera par l'équation

$$xz = \mathrm{K}yu;$$

pareillement, le lieu à trois droites est la courbe représentée par la relation

$$xz = \mathrm{K}y^2.$$

D'après le langage d'Apollonius, il existait certainement des démonstrations plus anciennes, mais incomplètes, permettant d'établir que ces lieux sont des sections coniques; il les supposait d'ailleurs assez bien connues de ses lecteurs pour que, sans qu'on les leur répétât, ils pussent voir comment son troisième Livre les complétait. Ce Livre comprenait donc aussi, sans doute, le complément des données sur lesquelles on appuyait antérieurement ces démonstrations, et continuait d'établir ces démonstrations mêmes; mais, ne connaissant point la détermination primitive des lieux, nous ne pouvons tirer de conclusions à ce sujet que d'après le Livre d'Apollonius.

Ce n'est guère difficile pour le lieu à trois droites : une section conique quelconque en est un, et Apollonius lui-même, au cours de sa démonstration dont nous avons parlé pour la génération par des faisceaux projectifs, déduit ce fait d'un cas particulier du théorème de la puissance.

Une section conique quelconque peut être, de même, un lieu à quatre droites : cela résulte du théorème général de la puissance dans le cas où deux droites opposées, $y = 0$ et $u = 0$, sont parallèles.

C'est déjà beaucoup que de posséder ces résultats. Pour le sentir encore mieux, faisons un rapprochement avec la représentation du *lieu solide* tel que la Géométrie analytique nous la fournit : en prenant pour origine un point du lieu, on

obtient une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

ou bien encore

$$x(ax + by + d) = -cy\left(y + \frac{e}{c}\right),$$

et la courbe se trouve précisément représentée comme lieu à quatre droites, avec deux droites opposées parallèles.

Le maniement des surfaces, tel que les anciens l'entendaient, et l'introduction de coefficients au moyen de la théorie des proportions, répondent exactement à notre traitement des expressions du second degré : par conséquent, la représentation actuelle d'une courbe par l'équation générale du second degré a la même portée géométrique que l'ancienne détermination comme lieu à quatre droites, lorsque deux droites opposées sont parallèles; on pouvait, au reste, y ramener également le lieu le plus général à quatre droites.

La mention toute spéciale que fait Apollonius de son perfectionnement dans le traitement de ces questions nous atteste suffisamment la grande importance, et l'attention réelle, que l'on prêtait aux lieux à quatre et à trois droites.

Un autre Ouvrage perdu d'Apollonius peut encore se rattacher à la question du lieu à quatre droites : c'est le *Traité de la section déterminée*. On sait, en effet, qu'il comprenait, sur une droite, la construction de points dont les distances à deux couples de points de la même droite forment des rectangles ayant un rapport donné, avec une discussion soignée de ce problème; or cette construction se ramène facilement à la recherche des points d'intersection d'une droite et d'un lieu à quatre droites, en calculant les quatre distances comme parallèles à la droite donnée.

En opérant ainsi, la détermination d'un lieu à quatre droites coïncide avec le théorème sur l'involution des points d'intersection d'une droite avec une section conique et avec les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit, théorème retrouvé plus tard par Desargues, et qui porte son nom. Toujours est-il que le *Traité de la section déterminée* contenait quelques parties importantes de la théorie moderne de l'involution.

Ainsi donc, suivant les suppositions que nous venons de faire, on appelait primitivement *problèmes solides* ceux qui dépendaient d'équations du troisième degré et que l'on représentait stéréométriquement : cette dénomination s'attacha plus tard à la solution par sections coniques, et l'on en vint à embrasser aussi sous ce nom des problèmes qui, exprimés analytiquement, eussent dépendu d'équations du quatrième degré.

Le problème solide le plus simple est relatif à l'équation cubique pure; nous en avons déjà pris connaissance à propos de la multiplication du cube, et nous pûmes voir, en même temps, comment l'usage des sections coniques était primitivement lié à la solution de cette question. D'autres exemples de problèmes de cette nature se présentèrent à notre attention dans la trisection de l'angle, ou dans les intercalations auxquelles se ramène cette trisection, et nous avons dit qu'Archimède, dans son *Traité des spirales*, fait encore différemment usage de ces mêmes intercalations : Pappus nous renseigne en effet sur la façon dont on les effectuait au moyen des sections coniques.

Mais, parmi tous les exemples que nous ayons des meilleurs jours de la Mathématique grecque, les plus importants pour la solution des problèmes solides à l'aide des sections coniques se trouvent, d'abord dans le traitement de l'équation à laquelle Archimède ramène sa *division de la sphère* (*cf.* p. 153), solution qui nous est parvenue, puis dans la construction des normales, issues d'un point, à une section conique, au cinquième Livre d'Apollonius; et ce qui rend ces solutions particulièrement intéressantes, c'est le soin avec lequel sont expliquées les conditions de possibilité, tout comme le souci pris de la discussion du nombre de solutions dans les divers cas que l'on peut obtenir en attribuant différentes valeurs aux quantités données. Il ressort alors clairement que la construction par les sections coniques n'est pas tant un moyen, très insuffisant d'ailleurs, de déterminer les grandeurs cherchées que, bien plutôt, un excellent procédé théorique pour s'enquérir des cas où elles existent — conformément à ce que nous avons déjà dit à propos du but de la construction géométrique chez les Grecs.

Les déterminations de maxima et de minima obtenues ainsi pour les quantités données constituent véritablement d'importants théorèmes géométriques qui étaient le but capital de l'investigation.

Nous avons vu (p. 152) qu'Archimède ramenait la division de la sphère à l'équation

$$DB^2 : DX^2 = XZ : TZ,$$

où D, B, T, Z sont des points connus, et X un point cherché, sur une droite. Dans le manuscrit conservé dont nous avons déjà parlé — et qui est peut-être d'Archimède lui-même, pour former un appendice à son deuxième Livre sur la sphère et le cylindre, — ce problème est résolu d'une manière qui se peut rendre comme suit : écrivons son équation sous la forme $\frac{b^2}{x^2} = \frac{a-x}{c}$, puis égalons ces deux quotients à $\frac{e}{y}$, dans lequel e est un segment quelconque ; x et y peuvent alors être déterminées comme coordonnées d'un point d'intersection de la parabole $x^2 = \frac{b^2}{e} y$ avec l'hyperbole $(a - x)y = ce$.

Dans les applications à la division de la sphère, les constantes que nous avons désignées ici par a et c sont positives, et il s'agit de déterminer une valeur de x telle que $0 < x < \frac{2}{3} a$, car X doit tomber entre D et B, extrémités du diamètre de la sphère, $DB = \frac{2}{3} DZ$; mais la représentation que l'on obtient pour l'équation, à cause des différentes positions qui peuvent être attribuées à Z, à T ou bien au point cherché X, comprend toutes les équations de la forme

$$x^3 - ax^2 \pm b = 0,$$

et le problème peut se poser de telle sorte que toutes les racines soient acceptables.

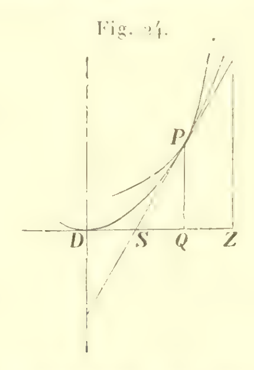
Nous avons donc là un exemple très net de ce que nous avons déjà dit précédemment : l'ignorance des Grecs, en ce qui concerne notre emploi des signes d'opération, constituait bien une lacune que la représentation géométrique rendait cependant moins sensible.

En quoi vont désormais consister les conditions limites dans les divers problèmes? d'une part, le point X tombe ou non sur l'intervalle exigé par le problème proposé; mais, ce qui demeure capital dans toutes ces questions, c'est de reconnaître les cas limites où les sections coniques sont tangentes, cas où, par conséquent, deux racines coïncident, car c'est par là que se fait la transition entre les cas où ces deux racines sont réelles et où, selon la conception alors en vigueur, elles pouvaient exister ou non.

Le fragment conservé indique que ce cas de transition a lieu si $x = \frac{2}{3}a$; par conséquent si $b^2c = \frac{4}{27}a^3$. Au contraire, si $x \lessgtr \frac{2}{3}a$, on aura $b^2c < \frac{4}{27}a^3$, condition correspondant à deux solutions.

La démonstration est facile grâce aux théorèmes sur les tangentes aux sections coniques : en effet, si la tangente de la parabole est elle-même en contact, au point P, avec l'hy-

Fig. 24.



perbole ayant pour asymptotes les droites $y = 0$ et $x = a$, P sera le milieu de la portion de tangente que sectionnent les asymptotes; et, de plus, le point S, intersection de la tangente avec l'axe des abscisses qui est tangent au sommet de la parabole, sera le milieu de la distance qui existe entre le point P et l'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées. Il en résulte que DQ, abscisse de P, est égale à $\frac{2}{3}$ DZ.

En particulier, comme le dit Archimède, la condition de possibilité

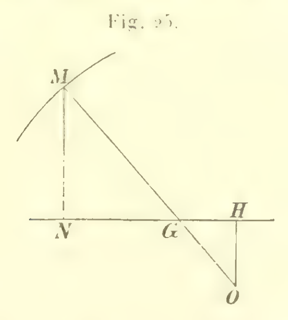
$$b^2 c < \frac{4}{27} a^3$$

est effectivement remplie dans le cas où, pour la division de la sphère, le point B tombe en Q, et T entre Q et Z. On n'obtient pourtant qu'une seule solution, car les points X tomberaient de différents côtés par rapport à B et, pour le problème spécial dont s'occupe Archimède, on ne peut utiliser que celui qui tombe sur DB.

Archimède ramène donc son problème sur la division de la sphère à une équation cubique de forme très générale : ainsi qu'on l'a déjà remarqué (p. 153), cette équation fournit également une démonstration pour le dernier théorème du second Livre sur la sphère et le cylindre ; elle trouve encore son application dans quelques questions, posées ailleurs par Archimède, sur la détermination de segments d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes de volume donné.

En revanche, la détermination des normales par Apollonius est un type des problèmes que l'on résout directement

Fig. 25.



au moyen des sections coniques, sans avoir recours à aucune équation. Nous nous contenterons d'en donner ici la solution en langage algébrique moderne : soient O un point (x_1, y_1) de la normale en un point M (x, y) d'une section conique, G le point d'intersection de cette normale avec l'axe principal, N la projection de M sur le même axe que nous prendrons pour axe des abscisses ; pour embrasser d'un seul

coup les cas particuliers traités par Apollonius, nous pouvons écrire avec les signes actuels,

$$\frac{y}{-y_1} = \frac{NG}{x_1 - x - NG}.$$

NG est la quantité dite maintenant *sous-normale*, et elle équivaut à p dans la parabole; ainsi l'équation trouvée se change en

$$xy - (x_1 - p)y - y_1 p = 0.$$

Pour l'ellipse et l'hyperbole, la sous-normale est respectivement égale à $\mp \frac{b^2}{a^2}x$, en prenant le centre pour origine, et l'équation s'écrira

$$\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right)xy - x_1 y \pm \frac{b^2}{a^2} y_1 x = 0.$$

Dans les deux cas, (x_1, y_1) étant donné, le point (x, y) sera situé sur une hyperbole : les points d'intersection entre cette hyperbole et la courbe donnée seront les pieds des normales issues du point (x_1, y_1).

Apollonius emploie précisément cette détermination pour rechercher en détail combien on peut mener de normales à partir des différents points du plan et, dans la discussion de cette question, l'objet essentiel est de déterminer les points (x_1, y_1) dont les hyperboles correspondantes soient tangentes à la courbe donnée : le lieu de ces points constitue, en effet, la transition entre deux régions du plan telles que, des points de l'une, on puisse mener deux normales de plus que des points de l'autre. Et, en cherchant les conditions d'un pareil contact, Apollonius trouve comment on peut déterminer l'ordonnée d'un point de ce lieu, connaissant son abscisse.

La courbe est celle que l'on nomme aujourd'hui la *développée* de la section conique; mais, ni dans Apollonius, ni chez les Anciens en général, il n'est question d'aucune étude plus spéciale sur ce sujet, autre que celle que nous venons d'indiquer.

26. — Géométrie calculante.

Par ce que nous avons appelé les *intégrations d'Archimède*, par la théorie des sections coniques d'Apollonius, et l'application qu'en firent les Grecs à la discussion de problèmes que notre Analyse fait dépendre d'équations du troisième et du quatrième degré, nous voyons jusqu'à quelle hauteur s'étaient élevées, soit la Géométrie, soit les autres Mathématiques grecques représentées sous forme géométrique. Nous avons également constaté la rigueur avec laquelle on s'assurait de la valeur universelle des Mathématiques; et, cependant, nous devions souvent rencontrer l'occasion de dire que cette tendance à la généralisation fut cause qu'on attacha trop peu d'importance au développement des ressources du calcul numérique réel, alors que c'était par lui seul que les Mathématiques pouvaient fournir des applications pratiques.

Bien entendu, toutefois, on ne négligea point complètement ce côté de la science : on continua d'appliquer à la mensuration du sol les propositions géométriques qu'on tenait des arpenteurs égyptiens, et l'on y joignit encore l'application des théorèmes les plus simples que l'on découvrait soi-même. Il serait, en effet, fort inconséquent d'admettre que des mathématiciens assez sagaces pour donner à leurs résultats une forme si générale, ne l'étaient point suffisamment pour voir l'usage dont ces resultats étaient susceptibles, en particulier pour les problèmes numériques qui se presentent dans la pratique; ceux qui élaborèrent une théorie aussi subtile des proportions ne pouvaient certainement ignorer le moyen de traiter des problèmes pratiques qui dépendent d'une règle de trois, simple ou composée.

Héron, chez qui nous rencontrons également l'un des résultats géométriques dont l'application pratique était des plus immédiates, à savoir la détermination de la surface d'un triangle à l'aide de ses côtés, Héron, dis-je, témoigne, dans ses collections de problèmes, que l'on appliquait numériquement au moins les plus simples théorèmes de planimétrie et de stéréométrie, et que l'on résolvait des équations du second degré. Mais on empruntait ces applications à un domaine

restreint de la Géométrie, et Héron se contente d'un médiocre degré de précision pour ses calculs : ces indications montrent bien que, en fait, on a raison d'estimer assez peu ce côté de la Mathématique grecque.

Cette entrave dans l'application aux calculs réels, pendant les meilleurs jours de la Géométrie grecque, ne tenait pas exclusivement à ce manque d'aptitude pour le calcul dont nous avons déjà parlé (p. 46-51) : les résultats mêmes de cette Géométrie n'étaient pas précisément appropriés à semblable usage. Les problèmes se résolvent, en effet, sous forme de constructions : celles-ci, sans doute, peuvent souvent se transformer en calcul, comme cela se faisait certainement longtemps avant Héron; cependant il existe, même en se limitant à la Géométrie élémentaire, tout un domaine important où cette transformation n'est pas réalisable, à savoir celui où les quantités que l'on doit déterminer les unes par les autres ne sont plus simplement des segments, des surfaces et des volumes, mais bien aussi des angles.

En d'autres termes, aux plus beaux jours de l'époque alexandrine, les Grecs ne possédaient point encore de *Trigonométrie;* les grands géomètres et astronomes de cette époque devaient seulement commencer à combler cette lacune.

Avant que cela n'eût lieu, on n'était pourtant point tout à fait incapable des recherches que l'on fait aujourd'hui par la voie trigonométrique : les théorèmes 12 et 13 du second Livre des *Éléments* d'Euclide en sont la preuve, puisqu'ils expriment la même chose que la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

et la peuvent remplacer dans toutes les questions générales pour lesquelles l'angle A n'est, ni donné, ni cherché en *mesure d'angle*. Comment saisissait-on la connexité entre la grandeur des angles et le rapport des segments? on le voit aux propositions des *Data* d'Euclide disant qu'un triangle est donné, selon sa forme, sous certaines conditions : d'après la proposition 80 de ce Livre, c'est le cas, par exemple, pour un triangle dont on donne un angle, ainsi que le rapport entre le rectangle des côtés qui le comprennent et le carré du côté

opposé — les autres angles du triangle et les rapports entre ses côtés se déterminent donc à l'aide de ces quantités.

Du reste, les *Data* renferment encore des propositions plus compliquées de cette nature, mais elles ne peuvent servir au calcul numérique que si, sous une forme ou sous une autre, la relation est déterminée entre un angle donné, en mesure d'angles, et le rapport des segments : on connaissait bien pareille relation pour les quelques angles au centre de polygones réguliers, dont on savait alors construire et calculer les côtés, mais ce calcul paraît avoir été longtemps négligé, et il n'était question que d'angles tout à fait particuliers.

De tout ceci l'on peut conclure que l'application de la Mathématique à l'Astronomie, commencée avec Eudoxe, ne pouvait encore permettre des déterminations bien précises au temps d'Euclide. En effet, ce sont précisément les angles eux-mêmes qui sont susceptibles d'être observés avec quelque exactitude, et les mathématiciens ne savaient point s'en servir : ce qui explique, en retour, que l'on ne prêtât aucun soin à de telles déterminations.

Dans l'école d'Eudoxe, et surtout dans celle de Platon, on pallia sans doute cette indifférence de la même manière que l'indifférence pour le calcul explicite des quantités irrationnelles : on estimait alors que, puisque aussi bien dans les déterminations empiriques il n'est point d'exactitude mathématique possible, aussi bien on pouvait se contenter d'une détermination grossière. Si l'on faisait de ces déterminations des postulats, il ne s'agissait plus que d'en déduire, avec une sûreté absolue, les résultats qui découlaient des hypothèses une fois posées.

Malgré qu'on en fût ainsi venu à négliger la mesure des angles, les grandeurs d'angles s'imposaient néanmoins d'elles-mêmes en Astronomie : elles pouvaient se présenter, par exemple, comme rapports entre les temps employés pour parcourir un arc et le cercle entier d'un mouvement uniforme. Quant à la manière dont on savait appliquer cette sorte de déterminations pour des déductions mathématiques exactes, nouveau cas de l'imprécision d'alors dans la détermination des angles, nous en trouvons un exemple dans l'étude, par Aristarque de Samos, sur la distance et la

grandeur du Soleil et de la Lune : pour cette recherche qui nous a été transmise, et que d'autres, Eudoxe notamment, avaient préparée avant Aristarque, on se sert du rayon de l'ombre terrestre pour la distance de la Lune à la Terre — rayon dont on calcule le rapport à celui de la Lune par la durée de l'éclipse — et de la distance angulaire entre le Soleil et la Lune au moment où cette dernière a exactement une moitié éclairée. Pour le reste, on opère selon la théorie des proportions, sur les rapports des distances et des rayons, tandis que l'on trouve le dernier angle en mesure d'angle : son complément est évalué par Aristarque à 3°, d'où il déduit que la distance du Soleil est 19 fois aussi grande que celle de la Lune, ce qui revient à admettre, dans notre langage trigonométrique, $\sin 3^\circ = \frac{1}{19}$.

Pour y parvenir, Aristarque utilise un lemme qui, trigonométriquement, s'exprime de la manière suivante : l'angle θ croissant de o à $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{\theta}{\sin \theta}$ grandira, et $\frac{\theta}{\text{tang}\, \theta}$ diminuera. Il considère ce théorème comme connu, et nous en voyons sans difficulté la liaison avec des recherches antérieures dont il rend le sens encore plus clair : $\frac{\theta}{\sin \theta}$ et $\frac{\theta}{\text{tang}\, \theta}$ sont en effet proportionnels au rayon vecteur et à l'abscisse de la *quadratrice* (*cf.* p. 62), de sorte que les résultats cités se rattachaient naturellement à l'étude de cette courbe.

En outre, le calcul des côtés des polygones réguliers avait fait connaître les valeurs $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\text{tang}\, \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, ou bien encore $\text{tang}\, \frac{\pi}{8} < \frac{5}{12}$, — en tenant compte de l'inégalité $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$: d'où l'on déduit, pour la détermination de $\sin 3^\circ$ ou $\sin \frac{\pi}{60}$,

$$\sin \frac{\pi}{60} > \frac{1}{10} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{20} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{60} < \text{tang}\, \frac{\pi}{60} < \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{18};$$

d'où, approximativement, $\sin 3^\circ = \frac{1}{19}$.

Grâce à la double inégalité

$$\sin\theta < \theta < \operatorname{tang}\theta$$

que les Grecs expriment de la manière suivante : le périmètre d'un polygone inscrit est plus petit et celui d'un polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle ; le même procédé peut s'appliquer à une détermination approximative de π. On a ainsi

$$3 < \pi < 3\frac{1}{3}.$$

On savait déjà faire des déterminations de cette nature au temps d'Antiphon et de Bryson (p. 56-57) et, en reconnaissant leurs fautes, on fut à même, désormais, de les éviter ; de même, à l'époque d'Euclide, on possédait également les moyens géométriques permettant d'arriver à une plus grande précision, moyens qui consistaient dans le calcul des périmètres de polygones réguliers ayant un plus grand nombre de côtés. A la vérité, Euclide représente expressément, telle quelle, l'irrationalité des côtés de polygone, se bornant à ceux que l'on applique à la construction de polyèdres réguliers, et il ne nous indique nullement dans son Livre tout ce que l'on pouvait faire dans ce genre ; mais il est bien probable que l'on ne s'était point uniquement occupé des côtés en question. On peut pareillement conclure, en considérant l'emploi que fait Aristarque du côté de l'octogone régulier circonscrit $\left(2\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}\right)$.

Mais, pour faire un véritable usage des ressources géométriques dont on disposait, soit pour une détermination plus exacte de π, soit pour une application plus précise des mesures d'angles, il fallait d'abord que le besoin s'en fît sentir et, ensuite, il fallait alors une grande énergie pour mener jusqu'au bout un calcul où il y avait à extraire différentes racines carrées : or ce besoin se fit sentir notamment après la détermination plus précise de l'obliquité de l'écliptique par Ératosthène, et dans sa mesure d'un degré du méridien. Dans cette dernière question, pour appliquer la différence de hauteur du pôle et la distance de deux lieux de

longitudes presque égales au calcul du diamètre terrestre, il fallait avoir une assez bonne expression de π : c'est Archimède, dans sa *Mesure du cercle,* qui devait vaincre les difficultés de ce calcul; aussi allons-nous donner brièvement ici le contenu de son Ouvrage, bien que celui-ci ne nous fournisse malheureusement aucun éclaircissement direct sur la façon dont il surmonta la plus grande de toutes les difficultés en question, à savoir la détermination des racines carrées.

Archimède commence par montrer, au moyen de la démonstration par exhaustion, que la surface du cercle est la même que celle d'un triangle qui aurait la périphérie pour base et le rayon pour hauteur : la quadrature du cercle est ainsi ramenée au calcul de la circonférence. Il démontre alors que le rapport de cette circonférence au diamètre, c'est-à-dire le nombre que nous appelons π, est plus petit que $3\frac{1}{7}$ et plus grand que $3\frac{10}{71}$: en effet, le périmètre du 96-gone inscrit est plus grand que $3\frac{10}{71}d$, et le périmètre du 96-gone circonscrit est plus petit que $3\frac{1}{7}d$, en désignant par d le diamètre du cercle.

Archimède parvient à ce résultat en déterminant les rapports entre les côtés d'un triangle rectangle ayant un angle de $\left(\frac{1}{2}x\right)$, à l'aide des rapports entre les côtés d'un triangle rectangle possédant un angle x. S'il cherche alors une limite supérieure pour la circonférence, il donne aux triangles d'angles x et $\frac{1}{2}x$ un côté commun adjacent à ces angles, tandis que, si c'est la limite inférieure qu'il désire obtenir, il donne au contraire l'hypoténuse commune à ces triangles; mais, dans les deux cas, avec notre langage trigonométrique moderne on peut rendre la relation trouvée entre les rapports par

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1-\cos x}\left(\text{ou } \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{séc} x + 1}\right).$$

Cependant cette conformité n'apparaît point dans l'application : en effet, dans l'une des recherches, on se sert des

limites supérieures pour les racines carrées auxquelles donne lieu la transition entre les rapports des différents côtés du même triangle rectangle ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), tandis que, dans l'autre cas, on emploie les limites inférieures, limites qui sont exprimées par des valeurs approximatives diversement formées.

Partant d'un triangle rectangle d'angle $\frac{\pi}{6}$, et passant à plusieurs reprises à de nouveaux triangles, Archimède trouve, suivant nos notations, que

$$\tang \frac{\pi}{96} < \frac{153}{4673\frac{1}{2}},$$

avec

$$\sin \frac{\pi}{96} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}},$$

et il parvient ainsi aux limites de π que nous avons mentionnées ci-dessus.

La glace une fois rompue par le travail d'Archimède, Apollonius peut fournir un calcul encore plus précis de π, et c'est peut-être à lui qu'il convient d'attribuer la valeur 3,1416 : c'est le degré de précision que l'on trouvera plus tard dans les Tables de cordes d'arc de Ptolémée et chez les écrivains indiens.

L'Ouvrage d'Archimède renferme, en fait, quelques calculs des limites inférieures de $\sin \frac{\pi}{n}$ et des limites supérieures de $\tang \frac{\pi}{n}$ pour $n = 6, 12, 24, 48, 96$: ce dernier fournit aussi une limite supérieure utilisable de $\sin \frac{\pi}{96}$, et l'Ouvrage d'Aristarque montre que l'on savait s'en servir.

La détermination de π, par Apollonius, dut conduire à une évaluation plus précise encore du *sinus* d'un petit arc, ou de la quantité dont les valeurs, mises en Tables, nous ont été transmises par de plus récents astronomes grecs : nous voulons parler de la *corde* de l'arc double. Pour établir une Table complète des cordes aux multiples de ce petit arc, il n'est besoin de rien autre que de connaître le théorème sur

les quadrilatères inscrits, dit aujourd'hui *théorème de Ptolémée,* parce que celui-ci en fait expressément usage pour le calcul de sa Table de cordes — ou bien encore tout autre théorème applicable de la même manière. Un tel théorème put être facilement trouvé au temps d'Archimède et d'Apollonius et, après eux, dans le moment où le besoin réel d'une Table de cordes se faisait sentir; mais la plus grosse difficulté fut certainement de mener à bien les calculs nécessaires de racines carrées. Or cette difficulté fut précisément cause qu'on améliora *ad hoc* les méthodes employées : comme nous l'avons dit précédemment (p. 50), ce progrès fut connexe à l'introduction des fractions sexagésimales.

La première Table de cordes d'arc, pour laquelle nous ayons un témoignage certain, date du deuxième siècle avant notre ère et fut dressée par le grand astronome Hipparque; elle fut perdue, d'ailleurs, ainsi qu'une autre Table moins ancienne de Ménélas. En revanche, la Table de cordes qui se trouve dans la *Syntaxe* de Ptolémée nous a été transmise et procède par intervalles d'un demi-degré jusqu'à un arc de 180°; fondée sur celles qui l'avaient précédée, elle doit avoir été plus complète qu'elles et présenté une plus grande exactitude : et puisque le *sinus* est la moitié de la corde de l'arc double, cette Table joue donc le même rôle qu'une Table de *sinus* d'arcs allant jusqu'à 90° par intervalles d'un quart de degré. Le diamètre du cercle est supposé égal à 120; les cordes sont exprimées d'après le système sexagésimal en entiers, minutes et secondes, c'est-à-dire, comme dans la mesure encore usuelle des angles, en fractions ayant pour dénominateurs 60 et 60^2; le rapport des cordes au diamètre est donc indiqué en fractions ayant pour dénominateur 432000. Pour leur emploi dans l'interpolation, sont adjoints les trentièmes des différences entre les cordes consécutives, trentièmes qui correspondent aux différences d'arc d'une minute.

Pour calculer cette Table, Ptolémée utilise principalement le théorème sur le quadrilatère inscrit; on peut l'employer pour calculer directement la corde de la somme ou de la différence de deux arcs : par là même ce théorème pourrait servir pour obtenir aussi les expressions de la corde de l'arc double, ou moitié, mais Ptolémée déduit

cette dernière expression d'une construction particulière qui équivaut à notre formule $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$.

En partant des cordes connues on peut arriver par cette voie à calculer celles de 1°30′ et de 0°45′ : à l'aide de ces cordes, on calcule ensuite celle de l'arc de 1° par une sorte d'interpolation qui repose sur ce que le rapport entre la corde et l'arc diminue si l'arc augmente, c'est-à-dire que

$$\frac{\text{corde } 0°45'}{0°45'} > \frac{\text{corde } 1°}{1} > \frac{\text{corde } 1°30'}{1°30'}.$$

Ptolemée indique une jolie démonstration du théorème géométrique employé ici, et qu'utilisait aussi Aristarque. Une fois trouvée la corde de l'arc de 1°, le théorème de Ptolémée sert au calcul successif de toutes les autres cordes.

Et puisqu'une Table de cordes joue le même rôle qu'une Table de sinus, on peut, si l'on veut, avec cette Table et le théorème de Pythagore, déterminer tout élément (côté ou angle) d'un triangle rectangle plan au moyen de deux autres éléments, dont un côté; de la sorte, quoique par des calculs assez pénibles, il est possible d'obtenir les déterminations que comporte la Trigonométrie plane. Il y a, dans la *Syntaxe*, différents exemples de semblables déterminations; mais il importait surtout aux astronomes de pouvoir faire des calculs de Trigonométrie sphérique, et, pour cela, il était indispensable, avant tout, d'avoir une Géométrie sphérique.

Dans les applications des Tables de cordes, Ptolémée fait usage d'une détermination de deux arcs, x et y, connaissant leur somme et le rapport de leurs cordes : il la représente géométriquement, et elle correspond à notre formule

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y) = \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y).$$

Seulement, comme il ne possède que des Tables de cordes, non seulement il est nécessaire d'y réduire notre second membre, mais, aussi, il faut déduire le rapport d'un côté d'un triangle rectangle à l'hypoténuse de celui des deux côtés, comme chaque fois qu'il s'agit de déterminer un angle par sa tangente.

27. — Géométrie sphérique.

En fait de Géométrie sphérique, nous n'avons que le théorème sur le rapport entre les volumes de sphères dans les *Éléments* d'Euclide.

Cependant les Grecs s'étaient occupés déjà de cette question pour l'Astronomie; au théorème mentionné chez Euclide, Archimède ajouta, il est vrai, la détermination exacte de la surface et du volume de la sphère, mais les astronomes ne pouvaient encore en rester là : il leur fallait, notamment, des moyens pour caractériser la position de points sur la sphère, d'étoiles au ciel, de lieux sur la terre.

Ils y parviennent en rapportant tout à un grand cercle, considéré comme connu d'une façon ou d'une autre, à l'horizon, l'équateur ou l'écliptique pour le ciel, à l'équateur sur la terre, et ce moyen ne diffère guère de l'emploi actuel des coordonnées sphériques ordinaires; tel est du moins le procédé qu'emploie Ératosthène lorsque, pour déterminer la grandeur de la Terre, il mesure l'éloignement entre deux lieux de même longitude et dont on connaît la différence de latitude; toutefois les désignations de longitude et de latitude ne se trouvent que dans la *Géographie* de Ptolémée. Au reste, nous pouvons rappeler ici que la division de la sphère, utilisée au douzième Livre des *Éléments* par Euclide (*cf.* p. 141), répond exactement à une division par de telles coordonnées.

On peut réaliser une application plus ou moins directe des coordonnées sphériques pour figurer les points célestes, ou terrestres, sur une sphère faite au tour : c'est, en tous cas, ce qui fut sûrement effectué pour les points célestes.

Grâce au développement élevé qu'ils avaient imprimé à la Géométrie, les Grecs étaient encore en état de résoudre des problèmes plus difficiles, comme ceux qui s'offrent quand on veut représenter convenablement une sphère sur un plan, et ils obtinrent même différentes applications de la projection stéréographique, représentation importante et intéressante au point de vue géométrique. Cette projection consiste, comme on le sait, en une projection centrale de la sphère, à partir d'un point fixe de celle-ci, sur le grand cercle qui a pour pôle le point fixe : elle se distingue essentiellement

par ces faits que, 1°, chaque cercle tracé sur la sphère est projeté sur le plan suivant un cercle et que, 2°, les angles conservent leurs grandeurs.

On sait, d'ailleurs, par les applications de cette projection qui nous sont conservées, que les Grecs connaissaient au moins la première de ces propriétés, qui est en relation étroite avec la théorie des deux systèmes de sections circulaires sur un cône oblique : on trouve bien une détermination des sections cycliques chez Archimède, mais Apollonius développe encore bien davantage la théorie des différentes sections d'un même cône.

La projection stéréographique peut donc être considérée comme un fruit indirect des théories d'Archimède et d'Apollonius. Elle fut appliquée, au temps d'Hipparque, à un appareil qui servait à la détermination du temps, pendant la nuit, d'après la hauteur, à un instant donné ([1]), d'une étoile connue. Pour cela, on employait deux disques, l'un portant des projections d'étoiles connues, l'autre des projections de l'horizon et de cercles horizontaux — ces deux figures étant projetées à partir du pôle sud du ciel : il s'agissait alors simplement de tourner l'un des disques, autour de l'image du pôle nord, de telle sorte que l'étoile observée vînt se placer sur le cercle horizontal correspondant à sa hauteur.

On trouve également une autre application de cette projection dans la *Géographie* de Ptolémée.

A côté de cette projection, d'une géométrie assez subtile, il en existait encore une plus simple : la projection orthogonale des astres sur le plan horizontal, sur le plan méridien et le premier plan vertical. Un petit Ouvrage de Ptolémée, qui nous est conservé sous le nom d'*Analemma*, nous fait connaître les constructions qui se rattachaient à ce système de coordonnées rectangulaires pour l'espace, constructions qui sont d'ailleurs semblables aux opérations de la Géométrie descriptive; il nous en montre aussi d'importantes applica-

---

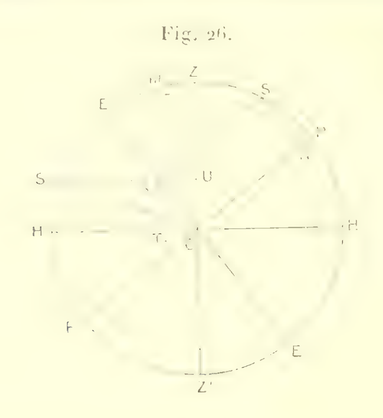
([1]) Le même appareil (astrolabe planisphère) servait également à déterminer l'heure pendant le jour, en observant la hauteur du soleil, à la condition de connaître, par une Table, le degré du zodiaque occupé par le soleil. Cet instrument est resté en usage jusqu'à l'invention des horloges astronomiques. (T.)

tions, soit au calcul trigonométrique, soit à des déterminations mécaniques.

Pour mieux comprendre encore la nature de ces applications, nous allons en considérer un cas particulièrement simple, celui dans lequel il s'agit de trouver la hauteur h et l'azimut ω du soleil à l'équateur, étant données la hauteur du pôle, φ, et l'heure, v; avec les Grecs, nous compterons celle-ci à partir du lever du soleil.

Dans ces conditions, soient ZHZ′H′ le cercle méridien, ZOZ′ l'axe vertical, POP′ l'axe du monde, HOH et EOE′ les traces de l'horizon et de l'équateur : l'arc HP ou ZE a donc la valeur donnée φ. Rabattons alors l'équateur sur le plan du méridien autour de sa trace EE′ : si le soleil prend la position S, l'arc PS est égal à l'heure connue, v, ce qui sert à déterminer le point S; la projection S_1, de S sur EE′, sera la projection du soleil sur le plan du méridien, et la droite horizontale S_1U, issue de S_1, rencontrera le méridien en un point S_2, tel que $H'S_2$ devienne égale à la hauteur cherchée h.

Fig. 26.



En prenant pour unité le rayon du cercle méridien, nous voyons par cette construction que

$$\sin h = OU = OS_1 \cos\varphi = NS\cos\varphi = \sin v\cos\varphi.$$

Ptolémée en tire la même conclusion que nous : toutefois, de légères modifications résultent de ce qu'il fait usage d'une Table des cordes, et qu'il en considère les rapports au dia-

mètre du cercle. D'autre part, S_1S étant la distance du point représentatif du soleil au plan du méridien, on voit que l'azimut ω, ou l'angle que fait avec le méridien un plan vertical passant par le soleil, est déterminé par la relation

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{S_1S}{OT_1} = \frac{\cos \varphi}{\sin e \sin \zeta}.$$

A la manière des Grecs, Ptolémée représente cette formule dans la figure en posant $T_1T = S_1S$, et en disant que l'angle $T_1OT = \omega$ est déterminé par le rapport des côtés du triangle rectangle T_1OT, rapport qui définit ceux qui existent entre les côtés et l'hypoténuse.

Cependant, Ptolémée ne se borne pas aux seuls cas qui dépendraient, dans la Trigonométrie sphérique, de la résolution de triangles rectangles; il donne aussi la construction analogue de la hauteur et de l'azimut d'un astre dont on possède la déclinaison et l'heure, connaissant la hauteur du pôle, et il montre comment on peut utiliser cette construction pour une détermination trigonométrique : or ce calcul dépendrait, dans notre Trigonométrie sphérique, de la résolution d'un triangle sphérique quelconque à l'aide d'un angle et des deux côtés adjacents. Il indique encore comment on peut obtenir l'arc diurne d'une étoile dont on possède la déclinaison ; Hipparque connaissait déjà ce problème, et le résolvait probablement de la même manière.

Au temps de Ptolémée, il est vraisemblable que ces procédés étaient généralement connus des astronomes grecs; c'est de là qu'ils se sont propagés plus tard aux Hindous, aux Arabes et aux Européens modernes.

Néanmoins, dans la *Grande Syntaxe*, Ouvrage qui, avant tous, nous a conservé l'Astronomie grecque, Ptolémée ne fait aucun usage de pareilles méthodes : il exécute les calculs trigonométriques à l'aide d'un théorème qui comprend d'une manière très élégante les solutions de quatre des problèmes relatifs à un triangle sphérique rectangle. Il est vrai qu'à l'époque où ce théorème fut trouvé par Ménelas, les procédés précédents, qui permettent de résoudre séparément les mêmes problèmes, doivent avoir été connus : mais, de toutes façons, ce théorème est établi dans les *Sphærica* et, par

diverses autres recherches géométriques intéressantes, cet Ouvrage sait encore se distinguer des Livres sphériques qu'on avait élaborés avant Ménélas en vue de l'Astronomie.

On voit notamment, dans les *Sphærica*, que la notion du triangle sphérique, de ses côtés et de ses angles, était déjà courante : la dépendance d'égalité et d'inégalité des côtés et des angles, dans un ou dans deux triangles sphériques, est étudiée, aux deux premiers Livres de l'Ouvrage, avec un soin semblable à celui que met Euclide, au premier Livre de ses *Éléments*, pour élucider les questions correspondantes, quoique plus aisées, qui se rapportent aux triangles plans.

Le troisième Livre débute enfin par le théorème capital auquel nous faisions allusion tout à l'heure, extension sur la sphère d'un théorème planimétrique qui a beaucoup de rapports avec les sujets traités dans les *Porismes* d'Euclide, à savoir : si une transversale coupe en D, E, F les côtés d'un triangle ABC, opposés aux angles A, B et C de ce triangle, on a

$$\frac{BD}{CD}\,\frac{CE}{AE}\,\frac{AF}{BF}=1;$$

et il est facile de voir que le même théorème subsiste si l'on échange les lignes droites avec des arcs de grands cercles sur une même sphère, en même temps que les segments rectilignes avec les *sinus* des segments d'arc — avec les cordes d'arcs doubles, comme eût dit Ménélas.

Les applications que donne Ménélas de ce théorème sont également imitées des théorèmes plans que l'on pouvait trouver dans les *Éléments* et *Porismes* d'Euclide, ou dans les Ouvrages semblables : et si nous employons pour plus de simplicité l'expression de *sinus*, comme le font les auteurs hébraïques et arabes qui nous ont transmis l'Œuvre de Ménélas, perdue en grec, il est à remarquer, dans ces applications, que les *sinus* ne se rapportent jamais aux angles des figures sphériques, mais seulement à leurs côtés ou à des portions de grands cercles. Ces *sinus* — ou, dans un cas spécial, leurs rapports aux *sinus* des compléments, c'est-à-dire indirectement les *tangentes* — remplacent toujours les segments rectilignes de la figure plane : on en peut conclure que les Grecs ne songeaient nullement à mettre les angles

et les côtés des triangles, plans ou sphériques, en relations générales les uns avec les autres.

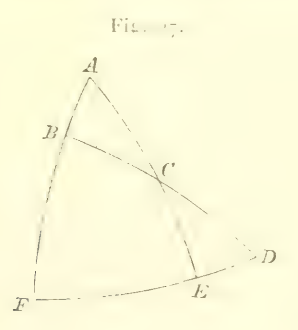
Comme exemple des résultats que peut obtenir Ménélas au moyen de son théorème principal, nous citerons l'extension à la sphère du théorème d'Euclide sur la proportionnalité entre deux côtés d'un triangle plan et les segments déterminés sur le troisième côté par la bissectrice de l'angle opposé. Une application encore plus immédiate du théorème de Ménélas fut, plus tard, d'un grand usage chez les astronomes arabes sous le nom de *règle des quatre grandeurs :* elle s'obtient en faisant (*voir* la *fig.* 27) AF = AE = 90°, et la formule de Ménélas se réduit à

$$\frac{\sin BF}{\sin CE} = \frac{\sin BD}{\sin CD}.$$

Au reste, puisque Ménélas ne parle pas des applications du théorème général à des calculs réels, nous ignorons s'il a songé à cette dernière application ; tandis que Ptolémée, qui nous rapporte les résultats pratiques déduits de ce théorème par les astronomes grecs, ne s'occupe que d'une figure encore plus particulière dans laquelle, également, l'angle B = 90°.

En effet, les calculs de Ptolémée sont identiques à ceux que l'on utilise en Trigonométrie sphérique pour un triangle

Fig. 27.



rectangle, au moyen des quatre relations qui existent entre les trois côtés, ou entre deux côtés et un angle : soient ABC ce triangle, rectangle en B, et D, E, F, les points où le grand cercle ayant A pour pôle coupe les côtés du triangle sphé-

rique; on a

$$\widehat{FE} = A,$$

et

$$\widehat{ED} = 90^{\circ} - A;$$

les autres arcs de la figure sont les côtés du triangle ABC, ou leurs compléments.

Puis, si l'on considère successivement les quatre triangles ABC, CDE, AEF et DBF et, toujours, le quatrième grand cercle comme transversale, on obtient précisément les quatre relations mentionnées.

28. — Décadence de la Géométrie grecque.

Le développement de la Géométrie calculante que nous venons de suivre, chez les Grecs, continua quelque temps après l'époque où la Géométrie grecque atteignit, par ailleurs, son apogée : en effet, dans les recherches géométriques, ou purement mathématiques sous forme géométrique, études plus abstraites et que les Grecs poussèrent particulièrement loin, nous n'avons plus à signaler aucun progrès de quelque importance après Apollonius. Non sans doute qu'il faille entendre par là que l'activité mathématique eût cessé aussitôt après lui : les bases jetées étaient si fermes, les méthodes en usage étaient si fécondes que, tant que les circonstances le permirent, il dut être facile aux disciples des grands mathématiciens de continuer l'œuvre dans les directions abordées. — C'est aussi ce qui arriva. Mais cette voie, faisant suite aux recherches plus simples des maîtres, ne pouvait dès lors embrasser que des questions plus spéciales et moins accessibles à tous : on s'explique alors fort bien qu'elle n'ait pas éveillé désormais un intérêt aussi grand, pendant une période de décadence, et qu'elle n'ait pas trouvé autant d'intelligences ouvertes qu'avaient pu le faire les études moins compliquées qui lui servaient de fondement.

C'est pourquoi nous en connaissons fort peu de résultats.

Effectivement, nous n'avons que des renseignements isolés sur les travaux géométriques des successeurs ou des contemporains des grands géomètres.

Ainsi, nous avons déjà parlé (p. 67) de Nicomède et de sa *Conchoïde*.

On nous rapporte de Persée qu'il fit des recherches sur les *courbes* dites *spiriques* : on admet que c'étaient des sections [1] de la surface formée par la rotation d'un cercle autour d'un axe situé dans son plan (tore), surface dont nous avons indirectement rencontré un cas spécial chez Archytas. L'une de ces courbes fut peut-être antérieurement étudiée par Eudoxe, lorsqu'il emploie une courbe appelée *hippopède* pour la représentation des orbites apparentes des planètes et du nœud de leur orbite : on a supposé que c'est celle que nous nommons aujourd'hui *lemniscate* [2].

La *cissoïde* de Dioclès est bien connue de nos jours, et elle constitue un exemple utile pour l'application du Calcul différentiel et intégral à la Géométrie; d'ailleurs, on est encore redevable au même auteur d'une nouvelle solution de l'équation cubique d'Archimède, à l'aide des sections coniques (p. 178).

En suivant la route frayée par les diorismes des plus anciens géomètres, Zénodore compara les surfaces de polygones qui ont même périmètre : il aboutit à ce théorème que le cercle possède la plus grande surface parmi toutes les figures de même périmètre, il démontrait la même propriété pour la sphère, dans l'espace, et, du reste, nous eûmes déjà l'occasion d'indiquer une telle proposition chez Archimède (p. 152).

Quant aux plus importants des résultats fournis par Pappus, parmi ceux que l'on ne saurait faire remonter aux grands géomètres, il faut sûrement les placer à une époque immédiatement postérieure à celle de ces géomètres. Sans doute, d'autres propriétés purent se faire jour, plus tard, aux périodes passagères pendant lesquelles l'esprit mathématique se ranimait : aussi bien Pappus s'attribue à lui-même un de ces résultats, et nous allons en mentionner quelques-uns :

Outre la surface spirale plane (p. 150), trouvée par Archi-

---

(1) Probablement par un plan parallèle à l'axe de rotation. (T.)

(2) Lemmiscate sphérique. D'après la restitution de Schiaparelli, l'hippopède d'Eudoxe est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre qui lui est tangent intérieurement. (T.)

mède, on détermina des surfaces limitées par des spirales et qui sont, d'une manière correspondante, représentées sur la sphère : cette détermination reposait sur le calcul d'Archimède pour la surface sphérique.

La projection de la section d'une surface de vis à filet carré, par un plan contenant une génératrice, projection faite sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface, est une *quadratrice*.

Pappus s'attribue enfin l'important théorème général suivant :

Le volume du solide engendré par une aire plane, tournant autour d'une droite de son plan, est égal au produit de cette surface par le chemin parcouru par son centre de gravité durant la révolution.

Du reste, cette propriété prit plus tard le nom de *règle de Guldin*, d'après le nom de celui qui devait la retrouver; elle ne diffère pas sensiblement de la représentation géométrique qui était appliquée déjà, au temps d'Archimède, aux intégrations nécessaires pour déterminer le centre de gravité — mais Pappus a toutefois un réel mérite pour l'avoir énoncée d'une façon générale.

On trouve encore, chez ce mathématicien, une extension du lieu à quatre droites (*cf.* p. 176). Il définit, en effet, une certaine courbe par la propriété que voici : le rapport entre les produits des distances d'un point de la courbe à deux groupes de droites données en nombre arbitraire possède une valeur connue ; — conformément au cinquième Livre d'Euclide, le rapport de ces produits est alors représenté comme étant un rapport composé (*cf.* p. 120), et si Pappus n'indique aucune propriété de la courbe qui résulte de cette définition, il y eut là néanmoins un point de départ important pour la Géométrie analytique de Descartes.

Quelque intéressants que puissent être plusieurs des résultats que nous signalons ici, une circonstance exprime bien, cependant, que l'intervalle de temps écoulé entre Apollonius et Pappus ne devait entraîner, en Géométrie, aucun progrès sérieux et durable : c'est que, en dehors des renseignements nombreux et importants sur les travaux des anciens mathé-

maticiens, renseignements dont nous nous sommes largement servi, il n'y a rien à signaler, en fait, dans Pappus, comme théorèmes véritablement nouveaux. Il n'est donc pas étonnant que ces cinq cents années aient fait régresser considérablement la science et l'intelligence des trésors mathématiques du passé : on s'en aperçoit encore mieux, notamment, aux lemmes multiples que l'on croyait devoir joindre aux Ouvrages anciens, et que Pappus nous a conservés pour cette période ; ils donnent, en effet, pour chaque détail, une explication méticuleuse qui fait ressortir combien peu l'on avait su garder la compréhension de l'ensemble.

Et si, maintenant, on se demande comment une telle décadence fut possible pour une science aussi bien établie, aussi richement développée que la Géométrie grecque, on est tenté, sans doute, d'en attribuer la cause aux diverses circonstances extérieures que nous indiquions dans notre aperçu historique. Encore n'est-il point là d'explication suffisante, comme nous en pouvons juger selon Pappus : beaucoup d'écrits anciens avaient été conservés ; par eux, semble-t-il, l'esprit mathématique perdu eût pu être recouvré, et reprise l'évolution interrompue. Il n'en fut rien cependant, dans l'antiquité : il fallut, chez les Arabes, puis chez les Européens des temps modernes, que l'on apportât à l'étude des travaux antiques une originalité toute fraîche, féconde elle-même dans de nouvelles directions, avant de pouvoir s'approprier parfaitement la substance de ces recherches mêmes.

La raison de cette décadence, comme de cette impossibilité d'une résurrection, il la faut alors chercher dans les défauts que présentaient les écrits des anciens dont on était toujours en possession ; sans doute nous les avons indiqués en passant, mais, une fois encore, il est utile de les bien tous mettre sous les yeux.

Un premier défaut tient précisément à ce qui, par ailleurs, excite notre plus grande admiration : ce souci extraordinaire que l'on avait d'assurer une correction logique inattaquable, par des formes précises. Voici, en effet, une conséquence immédiate de cette préoccupation : on élaguait tout ce qui eût pu faciliter l'abord des questions, en permettre l'aperçu d'un simple coup d'œil, ou rendre plus clair

le but de chaque opération. Longtemps, sans doute, l'intelligence de ce que recélaient ces formes, sous leur précision, se maintint jusqu'à un certain point : on apprit même à les imiter en partie; mais, en y dépensant toute son énergie, sans embrasser l'ensemble par une compréhension plus générale, on en restait fatalement à s'intéresser à ces formes et à s'approprier le plus simple de leur contenu, tandis que, d'un autre côté, l'admiration de ces formes mêmes prêtait à ce qu'elles exprimaient un tel caractère de perfection que cela dut décourager des travaux personnels. Au début, du moins, les résultats de ces travaux n'eussent effectivement revêtu qu'une forme infiniment moins parfaite.

Un autre inconvénient tenait à la forme géométrique qu'avaient affectée l'Algèbre et la science des grandeurs, en général, pour l'exécution d'opérations algébriques. Assurément cette forme géométrique ne le cédait, ni en clarté, ni en commodité pratique, au langage algébrique moderne, autant qu'un lecteur moderne pourrait peut-être le supposer : quiconque est familiarisé avec ce genre de représentation, et connaît la signification des figures, peut les transposer pour opérer avec elles, aussi facilement que l'on transpose et que l'on assemble aujourd'hui les expressions littérales; il peut, en outre, en montrant ces figures, faire comprendre oralement à ses élèves les opérations effectuées. Et, en temps de paix, aussi longtemps que l'enseignement verbal se développait à Alexandrie, il en résulta que l'intelligence mathématique put parfaitement se maintenir; mais, sitôt que la paix eut été troublée, et que se perdit la tradition conservée par cet enseignement, on n'eut plus alors d'autre recours que l'étude d'Ouvrages méticuleusement élaborés et l'on régressa fatalement d'une manière sensible. Car la représentation géométrique de l'Algèbre est d'une lecture difficile, ce que l'on conçoit parfaitement en songeant que le texte et la figure interviennent chacun pour soi et que, de la sorte, il les faut étudier en allant sans cesse de l'un à l'autre.

A ces défauts, concernant principalement la forme, s'en ajoutait encore un autre que nous eûmes souvent l'occasion de mentionner déjà et qui, lui, est réellement relatif au fond même : les mathématiciens grecs avaient une

si haute idée de leur dignité scientifique qu'ils excluaient de leurs œuvres classiques tout ce qui ne leur semblait pas parfaitement rigoureux. En conséquence, comme nous l'avons vu à propos de l'extraction de la racine carrée, de véritables calculs numériques, qui ne peuvent régulièrement fournir qu'une approximation, étaient écartés, et renvoyés à une science moins estimée, la *logistique;* on omettait ainsi du même coup les applications pratiques et cependant, plus tard, quand on en vint à moins considérer la valeur de la science en elle-même, ces résultats eussent pu communiquer des impulsions nouvelles aux mathématiciens, et tenir en éveil le goût scientifique.

Cette négligence des Mathématiques appliquées devait entraîner des conséquences nuisibles : elles apparaissent plus nettement en les mettant vis-à-vis des conséquences avantageuses qui, pour certaines branches, allaient résulter de la méthode opposée. Nous venons de voir, en effet, que la Géométrie calculante dut son développement à ses propres applications à l'Astronomie, cependant que tout s'arrêtait encore par ailleurs et, en même temps, ce développement persistant permit de réaliser d'importants progrès dans l'exécution des calculs pratiques : il s'ensuivit une connaissance familière des nombres, qui contribua certainement à porter l'Arithmétique aussi loin que nous la voyons poussée chez Diophante, c'est-à-dire bien au delà du point atteint par les mathématiciens grecs antérieurs.

29. — Arithmétique grecque plus récente : Diophante.

Nous avons déjà rencontré, dans les Livres d'Euclide (Livres 7-9), le fondement scientifique général de l'Arithmétique grecque : sans doute, ce début n'a ni la largeur, ni la fermeté scientifique de la base sur laquelle, dans ses autres Livres, il établit la Géométrie et, sous forme géométrique, la théorie générale des grandeurs; toutefois, c'est encore la même généralité de forme. Ainsi, bien qu'il s'agisse de nombres, les propositions ne sont point expliquées par des exemples numériques, et, cependant, de tels exemples avaient dû servir pour constituer la théorie générale : c'est ainsi

que déjà les Pythagoriciens connaissaient certainement des exemples de nombres dits *parfaits*.

De même, en esquissant l'Arithmétique géométrique, nous avons parlé de diverses autres formes numériques, telles que les nombres polygonaux, dont on s'occupa de bonne heure; et, pour calculer pareils nombres, il fallut nécessairement, dans les premiers temps, se livrer tout d'abord à des études pratiques.

Enfin nous avons vu que, dans la théorie des nombres, l'attention avait été attirée par toute une classe de recherches qui concernaient l'application des solutions générales des équations du second degré aux équations numériques : on étudia les conditions pour que des compositions de nombres aboutissent à des solutions rationnelles des équations quadratiques, c'est-à-dire les conditions voulues pour que certaines figurations numériques soient des carrés — et, à cet effet, on traita les équations que nous appelons aujourd'hui *équations indéterminées du deuxième degré*.

Nous avons dit, aussi, que ces équations s'emploient dans l'extraction approximative de la racine carrée de certains nombres déterminés, tels que 2; on ne rencontre cependant que des exemples isolés de pareilles équations dans les Mathématiques grecques antérieures, mais nous croyons néanmoins devoir les mentionner ici d'une façon spéciale, parce que nous verrons, bientôt, qu'elles furent le point de départ d'une direction dans laquelle, par la suite, les Grecs poussèrent beaucoup plus avant. En effet, d'abord éveillé par le souci d'aboutir à des solutions rationnelles, l'intérêt se porta plus tard sur les équations indéterminées, elles-mêmes.

Durant la période Alexandrine, on poursuivit des études pratiques sur certaines classes de nombres entiers : il nous en est fourni une preuve avec Ératosthène et la manière dont il comptait les premiers nombres premiers à l'aide de la méthode dite *crible d'Ératosthène* (cribrum Eratosthenis); on écrit d'abord intégralement la suite des nombres jusqu'au point où l'on veut arrêter l'investigation, puis on barre chaque deuxième nombre à partir de 4, chaque troisième à partir de 6, chaque cinquième à partir de 10, etc. — Les nombres qui restent, passés pour ainsi dire au crible, sont les nombres premiers.

C'est peut-être à tort, il est vrai, que l'on attribue à Archimède un problème arithmétique assez compliqué sur les bœufs du Soleil, mais, en revanche, nous l'avons vu exécuter une autre détermination numérique théorique, celle de la somme des premiers nombres carrés : les sommes ainsi formées nous fournissent un exemple de ces nombres pyramidaux dont il fut question dans l'Arithmétique géométrique; elles donnent en effet les nombres qui correspondent à une pyramide à base carrée — puis, avec ceux-ci, on peut calculer sans difficulté tous les autres nombres pyramidaux.

Ainsi donc, lorsqu'il nous apprend la connaissance qu'avaient les Anciens sur les nombres figurés, non seulement en ce qui concerne les nombres polygonaux, mais encore les nombres pyramidaux, Nicomaque pouvait effectivement s'appuyer sur des résultats qui dataient des grands mathématiciens. D'ailleurs, outre la théorie particulière de ces nombres, on rencontre chez lui une observation qui constitue une suite au théorème, déjà connu des Pythagoriciens, sur la formation des nombres carrés au moyen des sommes des premiers nombres impairs : tout nombre cubique peut également se représenter comme une somme de nombres impairs consécutifs.

Toutefois, le théorème général exprimé par la formule

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1),$$

ne paraît pas entièrement avoir été connu de Nicomaque.

Un écrivain romain beaucoup plus récent nous apprend encore que l'on savait, dans l'antiquité, additionner les premiers nombres cubiques, en d'autres termes que l'on possédait la formule

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ce résultat peut avoir été déduit de celui qui est mentionné plus haut ; cependant, chez un écrivain arabe, on en trouve une démonstration qui, par sa forme géométrique, trahit une origine grecque : elle pourrait bien alors avoir conduit, simultanément, au théorème de Nicomaque et à la sommation des nombres cubiques. Cette démonstration se rend de la façon

suivante en langage algébrique actuel :

$$(1+2+\ldots+n)^2-(1+2+\ldots+n-1)^2$$
$$= n\,\frac{n(n+1)}{2}+n\,\frac{n(n-1)}{2}=n^3;$$

la différence entre les deux carrés se représente à la manière grecque par un gnomon, qui consiste ici dans les deux rectangles

$$n(1+2+\ldots+n)=n\,\frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$n(1+2+\ldots+n-1)=n\,\frac{n(n-1)}{2}.$$

Jusque vers l'an 300 (ap. J.-C.) il n'y eut, malgré tout, que d'éparses contributions à un développement de l'Arithmétique telle qu'elle était déjà connue aux meilleurs temps de la Géométrie grecque et, de plus, nous ignorons à quelle date fut connu ce qui nous est rapporté : c'est seulement chez Diophante d'Alexandrie que nous rencontrons quelque innovation d'un intérêt général assez grand, et son Ouvrage d'Arithmétique, que nous possédons, montre les Mathématiques grecques par des côtés dont nous n'avions encore qu'une notion rudimentaire et obscure par les écrits conservés des mathématiciens antérieurs. Sans doute, le fondement théorique de cet Ouvrage est le même que dans Euclide, et le but des intéressantes recherches de Diophante est toujours, comme nous l'avons déjà dit à propos de ses prédécesseurs, d'éviter les quantités irrationnelles; mais ces études ont chez lui, cependant, une ampleur inconnue jusqu'alors : elles lui permettent d'établir des exemples pour des problèmes déterminés qui, sous des formes très variables, aboutissent à des équations avec solutions rationnelles, et, en particulier, de poser de nombreux problèmes indéterminés auxquels il s'agit toujours de trouver des solutions rationnelles.

Entre lui et les modes des expositions antérieures qui nous ont été transmises, il existe en outre cette grande différence : il ne s'occupe que de problèmes numériques spéciaux et n'utilise, pour les résoudre, que des opérations purement

numériques, sans établir jamais de théorèmes généraux : alors, non seulement les nombres donnés étant rationnels, mais encore ceux mêmes que l'on cherche devant l'être, la représentation géométrique n'est plus aussi nécessaire, chez lui, que dans les recherches dont les résultats doivent être applicables à des grandeurs quelconques, qu'elles puissent ou non se représenter par des nombres (c'est-à-dire des nombres rationnels). Diophante emprunte bien, il est vrai, ses dénominations à la représentation géométrique, comme *rectangle* pour produit, etc., mais les quantités traitées ne sont pourtant que des nombres; on le voit, par exemple, à ce que l'homogénéité géométrique n'est point observée : c'est ainsi que, sans plus de façons, il additionne un côté avec une surface.

Diophante attache même fort peu d'importance à la forme générale : aussi, chaque fois que, dans un problème posé d'une façon générale, un certain nombre doit avoir une valeur donnée, il assigne aussitôt à ce nombre une valeur déterminée, pour ne plus calculer qu'avec cette valeur. En opérant ainsi l'on n'obtient, immédiatement, aucune solution pour le problème général proposé, à moins, bien entendu, qu'il ne soit possible, avec l'exemple choisi par l'auteur, de déduire le procédé dont il faudra se servir en général, ce qui a lieu le plus souvent.

Aussi, Diophante a bien pour but une solution générale, et il n'introduit la valeur déterminée que faute d'un symbole pour représenter un nombre connu, mais arbitraire : c'est pourquoi, dans les cas où tout nombre ne pourrait être utilisé, il énonce formellement sous forme de diorisme la restriction nécessaire. Il emploie souvent encore cette introduction d'une valeur déterminée comme procédé d'essai pour l'inconnue cherchée : si elle ne convient pas, il peut, en suivant la marche des calculs, reconnaître quelle modification doit subir sa valeur d'essai pour aboutir enfin à la forme donnée, ou à la valeur donnée d'une autre quantité. La règle de la fausse position (*regula falsi*), que nous avons déjà rencontrée chez les Égyptiens, n'est qu'une application fort simple de cette méthode; mais Diophante s'en sert, lui, dans des cas bien plus compliqués.

Pour les calculs *rétrogrades* que nécessitent de tels essais, il est indispensable d'avoir une grande habileté dans le maniement des nombres, et une grande promptitude de coup d'œil sur les opérations qu'il faut entreprendre avec eux. Diophante, avant tout, fait preuve de ces qualités, contrastant ainsi avec les anciens mathématiciens grecs dont les Ouvrages nous sont parvenus, mais cette dextérité elle-même ne suffit pas partout : ainsi, ayant renoncé à la représentation géométrique, il avait besoin d'un moyen nouveau pour désigner à l'esprit une quantité inconnue, de même que ses fonctions simples. Diophante trouve ce procédé dans un système de symboles algébriques, et encore que les symboles ne soient que des abréviations des mots du langage écrit, et ne constituent nullement, en réalité, un mode parfait d'expression pour les opérations algébriques, ce langage remplit du moins la plus élémentaire des conditions d'utilité requises : il assure un aperçu des calculs plus prompt et plus facile que ne saurait le faire une exposition *verbale*.

L'inconnue est représentée par un symbole, probablement une abréviation (¹) qui ressemblait à un ς renversé, autant qu'on en peut du moins juger par les manuscrits; ses puissances, jusqu'à la sixième, sont désignées par les abréviations des mots grecs qui expriment le carré, etc., et de pareilles désignations sont affectées aux fractions ayant pour numérateur 1 et pour dénominateurs ces quantités elles-mêmes : on obtient ainsi, outre une figuration particulière pour l'unité (x^0), les symboles correspondant à

$$x^{-6},\ x^{-5},\ x^{-4},\ x^{-3},\ x^{-2},\ x^{-1},\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6.$$

Alors, les polynomes composés avec ces quantités multipliées par des coefficients numériques, peuvent donc s'écrire très clairement, et être posés en équations : c'est ce que l'on faisait en plaçant les termes à additionner immédiatement à côté les uns des autres, et en se servant d'un ψ renversé

(¹) Ce symbole sert couramment, dans le texte des manuscrits de Diophante, comme abréviation du mot grec ἀριθμός (nombre) aussi bien que pour désigner l'inconnue. Les copistes byzantins lui donnent d'ailleurs deux formes très différentes, dérivant, l'une du *sigma*, l'autre du *cappa* grec. (T.)

pour remplacer notre signe *moins* [1]. Des règles déterminées sont indiquées pour la multiplication des puissances et, de la sorte encore, on peut effectuer la multiplication des polynomes; enfin, Diophante sait également transformer les équations en faisant passer d'un membre à l'autre les différents termes, facteurs et diviseurs.

Ce langage de symboles offre cependant un très grave inconvénient : il n'y a de signes que pour une seule inconnue, et ses diverses puissances. Une extension à deux inconnues exigerait la création de douze symboles nouveaux, précisément parce que les symboles des puissances sont particuliers; on n'avait point songé à cela et, néanmoins, comme la chose arrive si souvent, l'insuffisance même de l'instrument devait fournir à qui s'en servait l'occasion de déployer toute son adresse.

Or Diophante en fait preuve, non seulement dans l'emploi des valeurs d'essai, mentionnées plus haut, pour les inconnues qu'il ne peut exprimer, mais d'une autre manière encore : ainsi, lorsqu'un problème présente plusieurs quantités inconnues qui doivent être déterminées avec diverses données, il choisit entre les inconnues celle à laquelle il veut appliquer sa désignation, que nous appellerons ici x, de sorte que, dès le début, il puisse alors les exprimer toutes à l'aide de celle-ci. Il se peut, d'ailleurs, que les notations ne soient pas constantes tout le long du problème; par exemple, à l'origine, une inconnue sera désignée par x; dans la suite des calculs, une deuxième puis une troisième inconnue seront représentées de même et, enfin, après la détermination de celles-ci, quand on revient à la question principale, la première inconnue est de nouveau figurée par x.

Il résulte de ces considérations que Diophante devait effectuer de tête, et représenter verbalement, ce que nous appelons des *éliminations;* mais, en revanche, cela constituait préci-

---

(1) Ce symbole sert pour tous les termes qui le suivent, la partie soustractive d'un polynome étant toujours écrite après la partie additive. Il paraît être un monogramme pour λι, abréviation de λιπών (λιπόντα, etc.), c'est-à-dire *laissant, diminué de....* (T.)

sément un exercice qui l'entraînait à choisir ses inconnues de façon que l'élimination fût la plus simple possible.

On pourrait encore penser que cette insuffisance dans les désignations pour les inconnues entraînait avec soi des difficultés particulières dans le traitement des problèmes indéterminés : tel n'est pourtant pas le cas car, ordinairement, ces problèmes demandent en termes très généraux qu'une grandeur composée soit un carré, ou quelque chose de semblable, et point n'est alors besoin de notations spéciales pour la racine de ce carré, etc.

Ces *problèmes indéterminés*, auxquels il s'agit de trouver des solutions rationnelles, méritent en fait la plus grande attention dans l'œuvre arithmétique de Diophante. En règle générale, il se préoccupe de trouver une solution unique du problème, sans rechercher la solution générale qui implique toutes les solutions particulières possibles, mais il ne faudrait pas toutefois attacher trop d'importance à ce fait si l'on veut bien comprendre les résultats que Diophante peut nous fournir, car ses particularisations consistent uniquement à donner tout de suite des valeurs déterminées aux quantités auxiliaires qui doivent servir à la solution du problème. Ici, d'ailleurs, aussi bien que dans les cas précédemment mentionnés, il put fort bien s'apercevoir que ces quantités auxiliaires pouvaient également prendre d'autres valeurs que celles qu'il leur attribue. Il y a lieu de le reconnaître, notamment, quand il admet qu'une grandeur formée d'une certaine manière doit être un carré, et remplir simultanément une autre condition; car il ne suffit pas alors de donner une valeur déterminée à la quantité auxiliaire qui doit conduire à un carré : au contraire, cette grandeur devient elle-même une quantité inconnue x, au moyen de laquelle Diophante doit exprimer en général les quantités cherchées dès le début, pour en revenir ensuite à déterminer x à l'aide de la deuxième condition donnée.

Parmi les équations indéterminées que Diophante a l'occasion de résoudre, il s'en présente une grande quantité des formes

(1) $$y^2 = a^2x^2 + bx + c$$

et

$$(2) \qquad y^2 = ax^2 + bx + c^2.$$

Nous appellerons à notre aide, par brièveté, le langage algébrique moderne : la première équation se résout en posant $y = ax + z$, la seconde, en posant $y = zx + c$: après quoi l'on peut, sans difficulté, exprimer rationnellement x par z, et z, de son côté, pourra admettre toutes les valeurs rationnelles — pourvu toutefois qu'elles ne rendent négative aucune autre quantité. On voit que les substitutions employées là sont exactement les mêmes que celles dont on se sert à présent pour rendre rationnelles des différentielles irrationnelles.

C'est à la dernière des formes d'équation ci-dessus que se réduisent les équations simultanées ou bien, selon l'expression de Diophante, l'*équation double*,

$$(3) \qquad \begin{cases} y^2 = ax + b^2, \\ z^2 = cx + b^2 ; \end{cases}$$

et il n'est même pas nécessaire que le dernier terme soit le même dans les seconds membres, pourvu toutefois que ce soit un nombre carré, puisqu'on peut alors leur donner la même valeur dans les deux équations en multipliant l'une d'elles par un carré.

Admettons, pour simplifier, que ce soit déjà fait : par soustraction des équations, et en exprimant x en fonction de z, on obtient

$$y^2 - z^2 = \frac{a-c}{c}(z^2 - b^2) = \frac{a-c}{c}(z-b)(z+b).$$

Si $z = t - b$, l'on a

$$y^2 = \frac{a}{c}t^2 - \frac{2ab}{c}t + b^2,$$

équation qui est de la forme (2).

Grâce à d'autres artifices du même ordre au point de vue algébrique, et par conséquent d'une portée générale, ou même encore au moyen d'un emploi plus spécial des propriétés numériques des nombres proposés, Diophante a su, du

moins, trouver aussi des solutions particulières rationnelles à d'autres équations de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} y^2 = ax^2 + bx + c, \\ z^2 = dx^2 + ex + f; \end{cases}$$

mais, toutefois, à celles-là seulement où c et f, ou bien a et d, sont en même temps des nombres carrés.

Or c'est seulement en voyant Diophante traiter une série de problèmes particuliers que l'on peut saisir sa méthode générale ; aussi convient-il ici de donner un spécimen de ses problèmes et du traitement qu'il leur applique : le sixième problème du sixième Livre, par exemple, a pour but de trouver un triangle rectangle tel que la somme de la surface et d'un côté, exprimés en nombres rationnels, soit égale à un nombre donné. Et, dans la reproduction de ce problème, afin de mieux faire saisir les points où l'auteur emploie ses symboles, ceux où il les omet, nous nous servirons des symboles x et x^2 à la place des signes originaux de Diophante, tout en gardant les autres lettres pour exprimer les nombres qu'il rend en langage ordinaire : alors le problème a donc pour objet de trouver des valeurs rationnelles de A, B et C qui satisfassent aux équations

$$A^2 + B^2 = C^2$$

et

$$\tfrac{1}{2}AB + A = a,$$

dans laquelle a figure un nombre donné.

Diophante donne tout de suite à ce nombre a la valeur 7 : il suffit ensuite de prendre comme valeurs d'essai $A = 3x$, $B = 4x$, $C = 5x$, pour satisfaire à la première des équations. La seconde équation donne, maintenant,

$$6x^2 + 3x = 7,$$

et, pour que cette équation ait des racines rationnelles, il faut que $\frac{9}{4} + 6.7$ soit carré : il est vrai que ce n'est point le cas mais, cependant, en calculant avec des nombres déterminés, Diophante a découvert la manière dont la quantité qui doit être un carré se compose avec des quantités proportionnelles aux côtés du triangle.

Il arrive donc au résultat que nous atteindrions précisément en posant

$$A = \alpha x, \quad B = \beta x, \quad C = \gamma x,$$

à savoir que la condition pour que les solutions soient rationnelles est que $\alpha^2 + 4 \cdot \frac{\alpha\beta}{2} \cdot 7$ soit un carré.

Comme cette condition ne dépend au reste que du rapport des côtés, on peut admettre ici $\alpha = 1$; ensuite, il prend provisoirement β pour inconnue x, et le résultat des valeurs d'essai fournit

$$1 + 14x = D^2.$$

D'après la première équation donnée, on doit avoir également

$$1 + x^2 = E^2,$$

et ces équations simultanées sont de la forme générale (4).

Diophante en déduit l'équation

$$x^2 - 14x = E^2 - D^2,$$

d'où il conclut que D est la demi-différence des facteurs, c'est-à-dire égal à 7 : d'après quoi $x = \frac{24}{7}$. Il y doit être arrivé en décomposant en facteurs le second membre de la dernière équation, et en posant $E + D = x$, $E - D = x - 14$; la valeur ainsi trouvée pour x représente le rapport entre les côtés du triangle rectangle cherché.

Donnant ensuite à x la même signification qu'au début, Diophante insère $A = 7x$ et $B = 24x$ dans la deuxième équation donnée : il en résulte

$$7 \cdot 12x^2 + 7x = 7,$$

d'où

$$x = \frac{1}{4}, \qquad A = \frac{7}{4}, \qquad B = 6 \qquad \text{et} \qquad C = \frac{25}{4}.$$

Pour donner une idée encore plus nette des nombreux problèmes considérés, nous allons choisir au hasard trois exemples auxquels nous adjoindrons de brèves indications sur leurs solutions d'après Diophante.

II, 20 : Trouver trois nombres carrés tels que la différence entre le plus grand et le moyen soit dans un rapport donné avec la différence entre le moyen et le plus petit; si l'on désigne le plus petit par x^2, et le moyen par $(x+a)^2$, le plus grand sera

$$(x+a)^2 + m[(x+a)^2 - x^2].$$

La condition pour que ce dernier soit un carré est exprimée par une équation de la forme (1), mentionnée plus haut.

Diophante se contente des valeurs suivantes pour les nombres donnés : $m = 3$ et $a = 1$.

III, 2 : Trouver trois nombres tels que le carré de leur somme fournisse de nouveaux carrés quand on y ajoute chacun des nombres.

Diophante représente la somme par x; les conditions seront alors remplies si les nombres cherchés sont

$$(a^2-1)x^2, \quad (b^2-1)x^2, \quad (c^2-1)x^2$$

et si

$$(a^2-1)x^2 + (b^2-1)x^2 + (c^2-1)x^2 = x,$$

d'où résulte pour x une expression rationnelle.

Diophante n'indique pour a, b et c, que les valeurs 2, 3 et 4.

IV, 27 : Trouver deux nombres tels que leur produit, augmenté de chacun des deux nombres, soit un cube.

Diophante égale le premier nombre à a^3x, le second à x^2-1, et donne à a la valeur 2; de la sorte une des conditions est immédiatement remplie, et il faut encore que

$$y^3 = a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1.$$

Conformément à la méthode suivant laquelle on traite les équations carrées indéterminées (1) et (2), on résout cette équation cubique en posant $y = ax - 1$; il en résulte une équation du premier degré qui détermine x.

C'est ici le lieu de remarquer que plusieurs des problèmes traités par Diophante lui sont une occasion de montrer sa connaissance de certains théorèmes relatifs à la théorie des nombres, celui-ci par exemple : un nombre de la forme $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ peut se décomposer de deux manières en

une somme de deux carrés, savoir :

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

de même que cette autre propriété : un nombre de la forme $4n + 3$ ne peut jamais se décomposer en une somme de deux carrés.

Ces exemples auront suffisamment fait comprendre que Diophante cherche uniquement des solutions rationnelles (et positives, bien entendu), mais non point nécessairement des solutions en nombres entiers, de sorte que la dénomination d'*équations de Diophante*, donnée à des équations indéterminées du premier degré qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers, repose sur une erreur : sans doute, on trouve dans son œuvre des équations indéterminées du premier degré, mais il n'a d'autre souci que d'indiquer alors la possibilité d'exprimer l'une des inconnues au moyen de l'autre, la rationalité de celle-ci entraînant la rationalité de celle-là.

L'éditeur de Diophante au XVIIe siècle, Bachet de Méziriac, prit occasion de ces problèmes pour traiter lui-même la question des solutions entières : nous verrons, du reste, que les Indiens avaient complètement résolu ce problème avant lui.

La question se pose maintenant de savoir ce qui, dans l'Ouvrage de Diophante, lui revient personnellement, et quelle date il faut assigner pour le reste : mais on n'a guère de points d'appui pour définir un tel choix. Nous avons fait remarquer que, à l'époque de la formation des Mathématiques grecques, on traitait déjà des problèmes de même genre que ceux dont s'occupe Diophante, et, si nous en rencontrons fort peu dans les écrits qui nous ont été légués, c'est que, par leur nature même, ces écrits n'en comportaient point — circonstance qui nous explique suffisamment leur silence ; je ne crois pas, cependant, que nombre des problèmes de Diophante puissent remonter à cette date car, d'après l'impression que nous en avons pu recueillir, les mathématiciens grecs de l'époque la plus brillante n'avaient point l'habileté de calcul qui nous frappe chez cet auteur. D'autre part, une collection de problèmes, aussi grande et aussi variée que celle de Diophante, ne provient certainement pas d'un seul individu : aussi l'hypothèse la plus plausible consiste-t-elle à admettre que ces

problèmes se posèrent de très bonne heure, vraisemblablement aussitôt après la découverte des quantités irrationnelles; ils continuèrent de s'accumuler ensuite par delà l'époque où le reste des Mathématiques grecques cessa de se développer, peut-être même jusqu'au temps de Diophante, qui aurait alors grandement contribué de sa personne à enrichir cette collection.

Nous sommes donc en présence ici du développement persistant d'une branche isolée de la Mathématique : et cela tient, sans doute, à ce que l'habileté dans le calcul, importante pour cette branche, se développa petit à petit, en partie pour les besoins de l'Astronomie, en partie grâce au contact avec un autre peuple, les Indiens.

Par son commerce, en effet, Alexandrie noua des relations avec les Indiens : or nous verrons qu'ils possédaient une grande aptitude à dénommer les nombres, à les représenter et à calculer avec eux; et cette habileté existait même avant qu'ils eussent inventé le système de position, c'est-à-dire la manière actuellement usitée d'écrire les nombres. Grâce aux relations commerciales, cette aptitude put notamment réagir sur les Grecs d'alors qui étaient encore, au point de vue des Mathématiques, dans des conditions assez favorables pour pouvoir s'en servir; à ce contact, les Indiens reçurent en retour une partie des résultats mathématiques des Grecs, et, comme nous le verrons, ils en profitèrent, spécialement dans les cas où l'on pouvait les convertir en opérations numériques — mais, toutefois, sans avoir jamais su approfondir les exactes spéculations théoriques des Grecs.

Pour ce qui concerne, en particulier, le langage symbolique de Diophante, langage qui s'écarte partiellement de celui que nous rencontrons chez les écrivains indiens beaucoup plus récents et dont les œuvres nous sont parvenues, il n'est besoin d'y voir aucun emprunt aux étrangers : en effet, les abréviations qu'il utilise s'offrent d'elles-mêmes dès que l'on veut exprimer les compositions formées avec des nombres, connus et inconnus, ou même tout simplement les fixer pour mémoire sans se servir de l'ancienne représentation géométrique; et si l'on avait une seule fois employé ces abréviations, leur grand avantage dut apparaître immédiatement, en

tant que procédé pour avoir un aperçu net sur les calculs. Le langage conventionnel de Diophante ne se constitua donc point nécessairement par évolutions successives : il peut fort bien avoir été l'œuvre de Diophante lui-même, ou d'un de ses prédécesseurs.

Ici, enfin, nous pouvons jeter un coup d'œil sur l'importance qu'allaient présenter plus tard les œuvres de Diophante : le caractère numérique, que revêtent chez lui les équations déterminées du premier et du second degré, dut rendre ces équations beaucoup plus facilement accessibles à ceux qui, de prime abord, n'étaient pas initiés aux Mathématiques grecques; plus accessibles, certes, que ne le pouvaient faire les formes géométriques et abstraites qui affectent, notamment, les équations du second degré chez Euclide — formes sous lesquelles les équations des deux premiers degrés sont traitées dans les écrits conservés d'autres écrivains géomètres. Aussi est-ce principalement par Diophante que l'Algèbre grecque passa chez les Arabes, intermédiaires qui devaient à leur tour lui permettre de rentrer en Europe lors du réveil des sciences.

Par ailleurs, on ignore dans quelle mesure la Mathématique indienne fut influencée par la méthode de Diophante pour le traitement des équations indéterminées : à coup sûr, cependant, les écrivains arabes continuèrent son œuvre en suivant la même direction que lui, et, en Europe, lorsque l'on put enfin connaître Diophante, non plus par l'intermédiaire des Arabes mais dans l'original, les études sur la théorie des nombres prirent un nouvel essor : il nous suffira de rappeler, à ce propos, que Fermat fit une étude très approfondie de l'œuvre de Diophante.

LES MATHÉMATIQUES INDIENNES.

1. — Aperçu rapide.

Nous allons maintenant nous occuper des Mathématiques indiennes, qui devaient exercer une influence extraordinaire sur le développement de notre science, en de tout autres directions, il est vrai, que les Mathématiques grecques : et cette influence se manifesta, d'ailleurs, beaucoup plus par la communication même de l'Arithmétique indienne que par les écrivains que nous aurons à mentionner. Toutefois ces auteurs nous transmirent la connaissance immédiate de ce que savaient, de ce que pouvaient, en général, les mathématiciens de l'Inde : ils ont écrit en sanscrit, langue déjà morte alors, mais utilisée d'autre part par les Brahmanes dans leurs Ouvrages religieux et scientifiques de la même manière que, plus tard, les Européens employèrent le latin.

Les plus anciens, parmi ces écrivains, donnent des règles géométriques pour dresser le plan des temples, règles de même nature que celles des Harpedonaptes de la vieille Égypte (p. 10), et dans lesquelles nous rencontrons maintes traces de l'influence de la Géométrie grecque : nous y trouvons en particulier quelques-unes des transformations que nous connaissons de l'Algèbre géométrique.

C'est, du reste, chez les astronomes indiens qu'il nous faut puiser la connaissance de la portion vivace de leurs Mathématiques : soit que les livres astronomiques contiennent des parties mathématiques destinées à venir en aide à l'Astronomie; soit que des remarques mathématiques apparaissent accidentellement dans l'exposition de cette science. Tel est le genre des renseignements que nous trouvons dans un écrit, *Sourya Siddhânta,* du IVe ou du Ve siècle apr. J.-C., dont l'auteur reste inconnu; *Aryabhatta*, né en 476 apr. J.-C., fit entrer un Chapitre mathématique dans un Ouvrage d'As-

tronomie; puis le douzième et le dix-huitième Chapitre d'un grand Traité astronomique par *Brahmagoupta*, né en 598, ont déjà une plus grande importance au point de vue mathématique.

Les deux Ouvrages beaucoup plus récents de Bhâskara Âcârya (c'est-à-dire le savant), né en 1114, qui portent le titre de *Lîlâvatî* (c'est-à-dire la belle) et de *Vîjaganîta* (calcul des racines), nous procurent enfin une notion plus complète sur les particularités de la Mathématique indienne : le premier traite à peu près ce que nous appelons *Calcul et Arithmétique*, tandis que la matière du second répond assez exactement à notre *Algèbre*. Quant au nom du premier de ces essais, il faut l'entendre en ce sens que c'est l'Arithmétique même qui est la *belle :* car il en est parlé dans les problèmes en termes lyriques qui s'accordent assez bien avec la tournure poétique qu'ont souvent les énoncés. Il existe du reste une légende suivant laquelle cette *belle* serait sa propre fille, que Bhâskara essaie de consoler d'une amère déception par l'attrait de ses calculs.

Bien que les Indiens aient eu, sans doute, une Astronomie primitive, très ancienne, et apparentée avec l'Astronomie chaldéenne, le *Sourya Siddhânta* paraît néanmoins avoir été fortement influencé, soit par Ptolémée, soit par des astronomes grecs plus anciens — à tel point que les éléments qui peuvent être d'origine indienne n'y sont plus guère discernables; d'ailleurs, il faut observer que l'influence grecque sur la civilisation indienne, et inversement, remonte certainement à l'expédition d'Alexandre; elle put donc se prolonger ensuite, en partie grâce à quelques colonies, en partie par les relations commerciales dont le centre était à Alexandrie. De sorte que, si nous rencontrons chez les Indiens des théorèmes et des opérations mathématiques connus des Grecs, tout nous porte à penser qu'ils ont été précisément empruntés aux Grecs; mais il faut alors reconnaître que les Indiens développent des vues qui exigent un traitement numérique poussé bien au delà du point que les Grecs atteignirent jamais avec leur mise en œuvre strictement théorique.

En fait, les Indiens ne manifestent aucune aptitude pour la

rigueur théorique : en revanche, ils étaient totalement démués des scrupules qui avaient poussé les mathématiciens grecs jusqu'à dédaigner le calcul réel en nombres, sous prétexte qu'il n'aboutit souvent qu'à une approximation. Ainsi, au contraire, pour les Indiens, le calcul numérique et son empirisme pratique furent le véritable moyen de s'approprier les théorèmes et les méthodes, peut-être même sans en bien comprendre les démonstrations proprement dites; en tous cas, ils n'expriment point ces démonstrations par des mots : ils se contentent d'en faire des tracés, puis, avec l'expression « *vois!* », de vous montrer la figure sur laquelle se fondait effectivement la démonstration des Grecs.

Mais l'écriture des nombres, que nous leur devons, et les règles de calcul qu'ils y ont attachées, ont une bien plus grande importance que les développements qu'ils purent réaliser, grâce à ce calcul, dans quelques branches plus abstraites des Mathématiques.

Il s'agit bien, en effet, de l'écriture des nombres, usuelle aujourd'hui, avec une valeur pour chaque chiffre selon sa place (système de position) et, en substance, de notre propre exécution mécanique des calculs, telle que la permet ce système. On ne sait malheureusement que fort peu de chose sur la manière dont fut constitué ce système; et le dixième chiffre o (zéro), qui le complète, se trouve déjà dans le *Sourya Siddhânta;* toutefois, le système de position ne paraît pas être sensiblement antérieur à ce Livre, encore que les neuf autres chiffres se rencontrent dans des inscriptions beaucoup plus anciennes.

Ce qui nous révèle un peu mieux, par ailleurs, comment les Indiens traitaient primitivement les nombres c'est que, dans la littérature qu'ils nous ont transmise, les vieilles méthodes d'écriture numérique sont souvent conservées, soit par respect pour la tradition, soit même que ces méthodes présentassent des avantages particuliers ; néanmoins, de cette façon, on ne peut se faire qu'une idée fort imparfaite sur la préhistoire du système de position indien. Et, pour essayer d'obvier un peu à cette lacune, nous ferons précéder l'exposition de ce système par un aperçu très bref de sa préhistoire *en général :* en mentionnant alors, avec toute la généralité

possible, les moyens dont on se servait pour le calcul des nombres, avant l'invention du système de position, avant, du moins, que ce système ne fût connu dans les milieux dont il s'agit, et en indiquant au passage les moyens plutôt insuffisants dont, entre autres, les Grecs eux-mêmes durent se contenter, nous pourrons toujours donner ainsi une idée des difficultés considérables qu'il fallut surmonter pour parvenir à ce système même.

Quant à la grande importance de ce système, non pas uniquement en tant que mathématique, mais encore pour les choses les plus journalières de l'humanité, il nous paraît inutile d'y insister.

2. — Noms et signes des nombres; numération avant les Indiens, et chez eux.

Une mère qui veut prendre une pomme pour chacun de ses 7 enfants n'a pas besoin de connaître le nombre 7, non plus que de savoir que 2 fois $7 = 14$ pour en donner deux à chacun : elle en prend une, tout simplement, ou deux, pour Jean, pour Louise, etc. Elle approche davantage, il est vrai, de l'idée de nombre, si elle a remarqué qu'il lui faut prendre, dans le premier cas, une pomme pour chaque doigt d'une main et pour le premier et le deuxième doigt de l'autre, mais les doigts n'ont rien à faire avec les objets dont le nombre doit leur être égal, ici les pommes : ils sont simplement, pour la mère, des *signes* de la quantité d'objets à prendre, — des désignations.

C'est de cette manière que les peuples se sont élevés à l'idée de nombre; on le voit à ce que presque tous, pour désigner de plus grands nombres, emploient le système décimal, le système quinaire (celui-ci simplement comme transition au décimal), ou le système vigésimal : et ces systèmes se sont formés naturellement, quelque temps qu'il ait fallu pour cela.

Quand on eut alors dénombré tous les doigts, ou même au delà, et que, à la façon d'un peuple de l'Orénoque, on eut compté par *un homme entier* pour exprimer le nombre vingt (c'est-à-dire les doigts des mains et des pieds), il fallut nécessairement reprendre ce compte pour considérer combien de

fois on avait compté de dizaines, de vingtaines, et combien encore d'unités au delà de la dizaine, de la vingtaine : ainsi naquirent les expressions numériques que nous pouvons désigner par $a + bx$, dans lesquelles x désigne l'unité supérieure, dizaine ou vingtaine. Puis, lorsque le développement et l'emploi des nombres en fut venu au point que le nombre des dizaines, ou des vingtaines, dépassât même dix, ou vingt, il fallut alors former des unités potentielles plus élevées 10^2, 10^3 ..., ou bien, comme les anciens Aztèques au Mexique, 20^2, 20^3 ..., afin de pouvoir représenter de la sorte les nombres de la forme $a + bx + cx^2 + \dots$.

Dans la pratique, on dut aller aussi loin que le besoin s'en fit sentir; mais la possibilité indéfinie de former des unités supérieures ne fut mise en valeur tout d'abord, théoriquement, qu'à un point de vue plus scientifique, comme chez Archimède dans son *Arénaire*.

Ainsi furent formés les systèmes décimal et vigésimal : ce dernier fut imaginé par des peuples qui vont, soit toujours, soit comme les Groenlandais dans leurs habitations, nus ou les pieds nus; mais, pour ce qui est des vestiges visibles du système vigésimal dans plusieurs langues d'Europe (le danois à ce point de vue n'est pas la moins curieuse), ils sont d'origine plus récente et tiennent vraisemblablement à ce que l'unité supérieure, la vingtaine, était commode dans certains cas pour le commerce et pour la vie courante. Outre les unités supérieures que nous venons de citer, on en a souvent employé d'autres dans la division des monnaies, mesures et poids, que la théorie avait indiquées comme plus pratiques, telles $12 = 2^2.3$: un type encore plus théorique de ces systèmes est le type sexagésimal, d'origine babylonienne, dont nous avons déjà parlé.

L'addition, la multiplication et les premières élévations aux puissances sont prises, plus ou moins inconsciemment, comme base de ces formations des nombres; d'ailleurs, pour la numération, on utilisa souvent aussi la soustraction, comme pour 19 par exemple qui, en latin, s'appelle *un-de-viginti*, en sanscrit *ekonavimçati* (c'est-à-dire $20 - 1$), ou simplement *ûnavimçati* (c'est-à-dire vingt-défectif).

Si, aujourd'hui, tant pour compter avec les nombres ainsi

formés que pour les écrire, nous nous servons d'un seul et même procédé, il n'en fut pas toujours ainsi, et l'on a pu employer d'abord, pour retenir momentanément les nombres nécessaires au calcul, le même moyen que pour la numération, à savoir les doigts. Chez tel peuple d'Afrique, pour retenir les différentes unités, il fallait qu'un homme tînt un doigt levé par chaque unité simple, un second homme un doigt par dizaine, un troisième un doigt par centaine : un homme seul pourra, de différentes manières, utiliser dans le même but les phalanges de ses doigts (calcul dactylique des Grecs et des Romains).

Enfin, d'autres moyens mécaniques furent employés, jadis, et le sont encore maintenant, aux points du monde les plus divers, comme ils l'ont été par les anciens Grecs, par les Romains, et au moyen âge en Europe; ils sont utilisés aujourd'hui dans le monde civilisé pour des fins spéciales (calculs au jeu de cartes), ou comme méthodes d'enseignement dans les écoles primaires : ainsi les planches de calcul, les machines à compter et les jetons. Les planches à compter sont divisées en colonnes pour les unités de même espèce, et l'on désigne celles-ci par de petits jetons, ou d'autres marques; dans les machines à calculer, empruntées par l'Europe aux peuples asiatiques qui les ont dès longtemps pratiquées, les colonnes sont remplacées par des cordes ou des barreaux le long desquels glissent des billes, ou tous autres objets : chaque colonne, ou chaque barreau, peut comporter deux subdivisions, dont l'une porte 4 ou 5 marques pour les unités de telle espèce, et l'autre 1 ou 2 marques pour des unités cinq fois plus grandes. — Quant aux jetons à compter, il en est de différentes formes pour les unités des diverses espèces.

On reconnaît aisément ce que ces instruments ont de pratique pour exécuter des calculs simples sur les petits nombres, addition, soustraction et multiplication : nous ne nous arrèterons donc pas à en étudier les divers modes d'emploi selon les différents lieux.

Mais voici que l'on approche bien davantage de notre système numérique lorsque, tout en se servant de la division par colonnes, on y inscrit des signes pour les nombres de 1 à 9, au lieu de poser des marques sur ces colonnes. Au reste,

il ne suffit pas, pour cela, de savoir écrire ; il faut encore, en même temps, connaître ses tables d'addition ou de multiplication, — ou bien alors il faut employer des tables écrites, — vu qu'il ne s'agit plus ici d'un jeu de marques purement mécanique : et l'on parvient au système de position quand, au lieu de se servir de colonnes tracées d'avance, on forme ces colonnes avec les chiffres eux-mêmes. Dans ce cas, on a besoin d'un signe qui tienne une place, sans posséder de valeur propre : c'est le o.

Naturellement, le zéro ne fut pas inventé tout de suite, et la preuve, c'est que le système de position se fit attendre si longtemps : d'ailleurs, lors même qu'il eût été trouvé, il fallut un certain développement pour s'en approprier l'usage, car pour pouvoir s'en servir il faut, non seulement savoir écrire et avoir appris quelques tables comme dans le cas où il s'agit d'inscrire les nombres dans des colonnes préalablement tracées, mais encore, jusqu'à un certain point, on doit écrire élégamment et régulièrement, afin que les chiffres occupent exactement leur place — ce qui exige encore plus de mémoire que lorsqu'on a la ressource d'inscrire aux colonnes autant de chiffres que l'on veut, y compris les chiffres *retenus*.

A l'exception des deux derniers, les procédés que nous indiquons ici n'exigent aucunement la connaissance de l'écriture, et l'on en peut dire tout autant pour les premiers stades du développement de la numération écrite, qui consistèrent simplement dans la substitution des marques fixes aux jetons mobiles, billes ou autres pièces. On mettait une marque par unité, absolument comme aujourd'hui encore quand les unités se présentent successivement, par exemple dans le dépouillement d'un scrutin : et ces marques pouvaient, prises ensemble, engendrer de nouveaux signes pour 5, ou pour 10, nombres qui eurent toutefois plus tard leurs marques spéciales — de même pour les unités supérieures. Ainsi l'on parvient à une désignation cohérente des nombres, comme celle des Romains pour nous en tenir à un exemple bien connu, et il est aisé de comprendre comment naquit une telle écriture numérique, en même temps qu'il serait facile d'en trouver la clef, même sans avoir aucune indication méthodique préalable.

Les Grecs, primitivement, et comme cela résulte des vieilles inscriptions, écrivaient les nombres de cette manière; et cependant, dans la litterature qu'ils nous ont fait parvenir, ils emploient des principes tout à fait opposés pour leur numération écrite. Chaque nombre entier d'unités, dizaines, centaines, possède, en effet, sa lettre propre : on écrit

$$\begin{array}{lcccccccccccc} & \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, & \theta, & \iota, & \varkappa, & \ldots, & \rho, & \sigma, & \ldots \\ \text{pour} & 1, & 2, & 3, & \ldots, & 9, & 10, & 20, & \ldots, & 100, & 200, & \ldots, \end{array}$$

et, de la sorte, on aura $803 = \omega\gamma$, $83 = \pi\gamma$, $833 = \omega\lambda\gamma$.

Au premier abord, on ne trouve point là de caractère systématique, et cette sorte d'écriture paraît être un recul : rien n'y fait distinguer ce qui est de la même nature et, par exemple, les signes β, $\varkappa$, σ, n'indiquent nullement qu'on est en présence d'unités de différentes espèces, mais en égale quantité. Néanmoins, on voit que les Grecs représentent un nombre beaucoup plus brièvement que les Romains, et l'on ne doit pas considérer cette écriture numérique comme appartenant à un stade inférieur du développement des Mathématiques, même si c'était la seule chose que nous connussions chez les Grecs.

De nos jours, bien des philologues ont abandonné cette vieille façon de voir suivant laquelle ce serait le signe du développement élevé d'une langue que de former tous les mots, comme le fait la langue latine, par des règles complètes, et de les assembler de manière que, sans avoir aucune idée du contexte, on puisse voir le rôle de chacun d'eux à la forme qu'ils affectent — et reconstituer ainsi le contexte lui-même; on retrouve, d'ailleurs, quelque chose d'entièrement analogue dans les langues des peuples les moins avancés. Actuellement, au contraire, on apprécie la perfection d'une langue à ce fait qu'elle est parfaitement intelligible avec le minimum de moyens possible, c'est-à-dire avec le moindre effort de ceux qui parlent et de ceux qui écoutent; et, comme en anglais, cela tient à ce que l'on y néglige tous les moyens qui permettent de juger la relation entre les mots particuliers, mais qui sont réellement superflus pour l'intelligence du texte. Bien entendu, une connaissance plus

approfondie de la langue devient nécessaire pour ne pas égarer le sens rigoureux, pour rendre toute méprise impossible et, par exemple, pour apprécier l'importance de la position des mots; de sorte que, si l'on dispose d'une telle possession de l'idiome, on parvient à comprendre beaucoup plus vite que s'il fallait reconstituer le contexte en tenant compte de l'accord en genre, nombre et cas. Or, précisément, l'écriture et la lecture des nombres, chez les Grecs, présentaient un pareil avantage en comparaison de la prolixe numération des Romains : car, non seulement les Grecs pouvaient écrire les nombres jusqu'à 1000 aussi promptement que nous, mais encore, pour qui est familiarisé avec leurs signes, leurs nombres sont d'une lecture plus rapide que ceux des Romains dont l'appréciation exige un dénombrement des différents signes.

Ainsi donc les signes grecs peuvent avoir été très bons pour écrire des nombres pas trop grands; mais, en revanche, ils étaient trop exclusivement destinés à l'écriture, et cela, vraisemblablement, parce que l'on employait des moyens mécaniques pour le calcul, chaque fois qu'il était nécessaire. Pour obtenir une numération écrite, qui fût à la fois convenable au calcul et utilisable pour la représentation illimitée des nombres, il fallait revenir sur ses pas, puisqu'une telle numération écrite exigeait l'union de la brièveté grecque et de la clarté romaine.

Or c'est précisément une tendance à cette union que nous trouvons dans le mode utilisé par les Chinois : les différentes unités supérieures ont, chacune, leur signe particulier, et le nombre de ces unités est exprimé par les mêmes chiffres qui désignent simplement le nombre d'unités simples. Si nous voulons remplacer un instant les signes des Chinois par une combinaison entre ceux des Romains et les nôtres, l'emploi de ce système sera représenté par les désignations suivantes :

$$833 = 8C\ 3X\ 3,$$
$$803 = 8C\ 3, \qquad 83 = 8X\ 3.$$

Puis le système se simplifie encore si l'on exprime l'espèce des unités supérieures par une addition de marques, comme

dans

$$833 = \ddot{8}33, \qquad 803 = \dot{8}3, \qquad 83 = 8\dot{3}.$$

Toutefois, c'est le système de position qui unit le mieux la brièveté à la clarté, et à la commodité d'emploi.

Nous avons éclairci, par les exemples les plus connus, le mode général pour la formation des nombres, et nous avons en même temps montré par quelles voies on est arrivé à compter et à écrire ces nombres : il nous reste à jeter encore un coup d'œil sur ce que nous connaissons de particulier à ce sujet, chez les Indiens, avant l'invention du système de position.

Une preuve que les Indiens se sont occupés de bonne heure de nombres élevés c'est que, depuis longtemps, ils possédaient des noms pour désigner les unités décimales jusqu'à 10^{17}. Un autre fait trahit en outre l'intérêt précoce qu'ils devaient porter à ces nombres : dans les légendes du Bouddha, on raconte qu'il créa lui-même des vocables pour les décimaux jusqu'à 10^{54}, et qu'il voulait même en imaginer pour les nombres au delà. Il appert de là, ainsi que de leur penchant à l'exagération numérique, que les Indiens possédaient dès l'antiquité ce qu'Archimède devait introduire chez les Grecs, beaucoup plus tard, par son *Arénaire*.

Sans doute, à leurs dénominations des unités décimales, il manque ces *collections*, comme en constituent chez nous le mille, le million, etc. : c'est une lacune. Mais, comme dans la numération écrite des Grecs, ce n'en est pas moins un symptôme du développement que de trouver un aussi grand nombre de dénominations, assez connues pour servir de moyen de communication orale. La spécialisation de chaque unité décimale par un mot se rapporte d'ailleurs aux principes mêmes qui devaient donner naissance au système de position, principes que l'on retrouve jusque dans la façon d'énoncer les nombres : c'est ainsi que, dans un passage, le nombre 1577917828 est rendu par une combinaison entre des nombres proprement dits et des expressions imagées offrant un sens numérique, à partir des unités : vasû (c'est-à-dire une catégorie de 8 dieux), 2, 8, montagnes (7), forme (1), chiffres (9), 7, montagnes (7), jours lunaires (15,

c'est-à-dire un demi-mois. Cette dernière désignation correspond à un nombre de deux chiffres commençant par 1, et ce fait peut se présenter dans le corps même d'un nombre composé de pareille façon; l'énonciation du nombre se fait ainsi plus vite que chez nous — à moins que nous ne voulions également nous contenter d'énoncer les chiffres séparément dans leur ordre — mais elle offre, en revanche, cet inconvénient qu'un seul et même chiffre peut porter des noms différents, comme ici 7 et 8. Ce procédé est accommodé à celui qu'on a fort employé pour retenir de mémoire certains nombres, ou même des règles mathématiques, et qui consiste à les mettre en vers, procédé qu'explique bien certainement le penchant des Hindous vers la poésie mais qui, de plus, offrait quelques avantages pour la pratique.

Il est vrai que c'est dans Brahmagoupta que nous trouvons l'exemple cité, c'est-à-dire longtemps après que l'on connût le système de position, et cependant, par sa nature même, cette manière de nommer les nombres doit être vieille, car elle suppose pour chacun d'eux d'antiques vocables formés selon leur rapport avec certains objets. Le nombre cité n'a pas de zéro : l'exemple lui-même peut donc bien être antique.

Pour ce qui est, à proprement parler, de la numération écrite, nous avons déjà remarqué que les neuf chiffres se trouvent employés dans des inscriptions très anciennes; il se peut, au reste, pour composer avec ces chiffres des nombres plus grands, que l'on se soit servi d'un procédé semblable à celui qui s'était encore récemment conservé à Ceylan : procédé qui consiste, en partie à compléter, comme faisaient les Grecs, la série des 9 chiffres par des signes particuliers pour 10, 20, 30, ..., 100, puis pour 1000, etc., en partie à désigner, comme les Chinois, le nombre de centaines en posant le chiffre voulu devant le signe de 100 — il se peut encore que l'on ait tout à fait suivi la méthode chinoise.

C'est, en effet, à peu près cette méthode qu'emploie encore Âryabhatta : il se sert des consonnes pour exprimer les chiffres et, par l'addition d'une voyelle, désigne les unités décimales; ainsi

$$ga = 3, \qquad gi = 30, \qquad gu = 30000, \qquad \text{etc.}$$

Il obtient de la sorte, pour les nombres, une représentation consonante et susceptible d'être versifiée.

Les procédés de calcul des Indiens, avant que le système de position eût été complété par l'introduction du chiffre 0, purent fort bien ressembler à ceux qu'on employait après la mise en usage du système; car la numération écrite dont on se servait permettait de faire comprendre, en tout cas, combien on avait d'unités décimales de chaque espèce.

Une partie des méthodes employées par les écrivains qui nous sont parvenus peut dater immédiatement de temps plus reculés, à savoir ceux où la signification des 9 chiffres est précisée par la place qu'ils occupent dans un *cadre* préalablement divisé : ce cadre dispense en effet, absolument, d'employer le signe 0. Tel est le cas, par exemple, dans la forme suivante de la multiplication de 12 par 735, forme que l'on employait aussi pour des nombres plus élevés :

Fig. 28.

	7	3	5
1	7	3	5
2	1 4	6	1 0
8	8	2	0

Les produits des chiffres isolés sont ici décomposés en unités et en dizaines : après quoi il n'y a plus qu'à additionner dans le sens d'une diagonale des petits carrés.

Les règles de calcul avec le système de position étaient les mêmes, chez les Indiens, que celles employées encore aujourd'hui, du moins dans leurs parties essentielles : et les divergences tiennent, pour la plupart, à des causes purement extérieures. C'est ainsi qu'on avait des tables de calcul relativement petites, étant donnés les caractères assez grands qu'il fallait écrire pour la clarté : mais ces chiffres, on pouvait d'ailleurs facilement les effacer et les remplacer par d'autres; et, pour cette dernière raison, rien n'empêchait d'additionner

et de multiplier à volonté de gauche à droite, pourvu qu'on eût bien soin toutefois de toujours corriger les chiffres déjà écrits, en y ajoutant les retenues qui peuvent résulter de la multiplication des chiffres suivants.

Dans la multiplication par un nombre de plusieurs chiffres, quand on était assez habile pour se passer d'inscrire les chiffres avec le même détail que dans le tableau ci-dessus, on pouvait commencer à multiplier par le chiffre le plus fort, puis, tout en multipliant par le chiffre suivant, immédiatement le plus fort, additionner en même temps le produit partiel ainsi formé avec celui déjà obtenu, et changer celui-ci en la somme acquise de la sorte, etc. En dehors du multiplicande, continuellement déplacé de façon que ses unités fussent situées sur la même verticale que les unités du produit partiel à former, et en dehors du multiplicateur, la table ne contenait jamais, ainsi, qu'un nombre obtenu par addition des produits partiels déjà faits.

Cet *effaçage* continuel exige, en revanche, une grande assurance, vu qu'on anéantit par là tout moyen de découvrir ses erreurs ; il faut donc pouvoir compter en particulier sur une mémoire qui retienne, non seulement les nombres momentanément en jeu, mais encore les tables dont on se sert. Aujourd'hui, dans l'Inde, on apprend par cœur de pareilles tables qui sont fort étendues, et il ne fait aucun doute qu'on en fît autant dans l'antiquité : ainsi, actuellement, on y apprend par cœur des tables de multiplication dont l'un des facteurs est un des nombres de 1 à 10, tandis que l'autre varie de 1 jusqu'à 30, jusqu'à 100 même — outre les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ — et, en plus, de vastes tables de carrés. Avec une mémoire à ce point exercée, il n'est pas étonnant que les Indiens fussent en état d'employer la multiplication, dite *multiplication de Fourier*, qui consiste à former en croix, et à additionner sur-le-champ, les produits de chaque chiffre des facteurs ayant, dans le produit final, le même ordre décimal.

3. — Emplois du calcul numérique.

Voyons maintenant à quels problèmes les Indiens savaient en outre appliquer leur aptitude au calcul numérique, apti-

tude dont la création du système de position est le plus sûr témoignage et qui, par la suite, trouva dans ce système son meilleur instrument : nous avons à cet égard des éclaircissements particuliers dans les nombreuses règles de calcul, et dans la riche collection de problèmes contenus dans le *Lilâvati* de Bhâskara ; ailleurs encore. Ainsi, par exemple, Âryabhatta donne déjà, pour l'extraction des racines carrée et cubique, les règles mêmes que nous tirons actuellement des formules $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$.

En ce qui concerne notre Arithmétique usuelle, les Indiens connaissaient la règle de trois, simple et composée, le calcul d'intérêt, même celui de l'intérêt composé, le calcul de société, la règle des mélanges, des règles pour mesurer les capacités, etc. Ils résolvent également, suivant des règles de calcul déterminées, divers autres problèmes que nous traitons aujourd'hui par une équation : entre autres, ils ont cette *règle de la fausse position* (*regula falsi*) que nous avons trouvée chez les Égyptiens (p. 8), mais ils ne s'en tiennent pas à cette simple règle.

Nous savons, par des sources arabes plus récentes, qu'ils employaient la règle dite *des deux fausses positions* (*regula duorum falsorum*) : elle servait, à l'aide de deux valeurs d'essai, pour résoudre un problème qui, traduit en équation, eût dépendu d'une équation du premier degré de la forme

$$f(x) = ax + b = k.$$

Si $x = \alpha$ et $x = \beta$ donnent, par insertion dans le premier membre, les valeurs $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ différentes de k, x se déduit des différences $k - f(\alpha)$ et $k - f(\beta)$, combinés avec α et β suivant une règle exprimée par la formule

$$x = \frac{\beta[k - f(\alpha)] - \alpha[k - f(\beta)]}{[k - f(\alpha)] - [k - f(\beta)]}.$$

Comme on le voit, cette règle répond exactement à ce que nous nommons maintenant une *interpolation simple*, et nous savons qu'elle n'est pas seulement utilisable en vue d'un calcul rigoureux, comme chez les Indiens, si $f(x)$ est réellement une fonction entière du premier degré, mais encore pour une approximation plus grande, si α et β sont déjà des valeurs

approximatives : ce dernier emploi ne se rencontre toutefois que sensiblement plus tard, chez les Arabes et en Europe.

Une autre règle de calcul, d'un caractère très général, est celle d'*inversion*. Elle consiste en ceci : ayant à trouver un nombre qui, après avoir été soumis à une certaine succession de calculs, conduit à un nombre connu, on peut y parvenir en soumettant ce dernier nombre à tous les calculs inverses, dans l'ordre renversé.

Les Indiens, du reste, établissent différentes règles particulières pour lesquelles il nous faudrait recourir à la solution d'équations du premier ou du deuxième degré, à une ou plusieurs inconnues. C'est le cas, par exemple, pour les règles sur les progressions arithmétiques et géométriques, établissant, non les relations générales dans lesquelles on peut au choix considérer comme inconnues l'une ou l'autre des diverses quantités, mais s'appliquant aux cas particuliers pour calculer isolément chacune des grandeurs, quand toutes les autres sont connues : ces règles sont données, sans démonstration, dans le *Lilâvati*. C'est encore le cas d'autres règles assez variées que nous comprendrons plutôt dans le prochain Chapitre, et qui sont nettement significatives en ce qui concerne les connaissances des Indiens dans la théorie des nombres.

En revanche, nous ne pouvons abandonner l'Arithmétique des Indiens sans présenter quelques spécimens des formes dont ils revêtent les exemples employés pour leurs différentes règles de calcul.

Dans la question que voici, nous trouvons une application purement numérique de la méthode d'*inversion*, que nous venons de citer :

Belle fille aux yeux étincelants (il s'agit de Lilàvati), toi qui connais la vraie méthode d'inversion, nomme-moi le nombre qui, multiplié par 3, augmenté des trois quarts du produit, divisé par 7, diminué du tiers du quotient, multiplié par lui-même, diminué de 52, après extraction de racine carrée, addition de 8 et division par 10, soit 2.

Le problème suivant se résout par la simple règle de la fausse position :

Le cinquième d'un essaim d'abeilles se pose sur une fleur

de kadamba, un tiers sur une fleur de silindha, le triple de la différence entre ces deux nombres s'est envolé sur une fleur de kutaja, et une abeille, seule, voltige dans l'air, attirée par le parfum d'un jasmin et d'un pandanus. Dis-moi, belle fille, le nombre des abeilles!

Une équation quadratique est présentée sous la forme que voici :

Au milieu du combat, le fils furieux de Prit'ha saisit un certain nombre de flèches pour tuer Carna : il en employa la moitié à sa propre défense, et le quadruple de la racine carrée contre les chevaux; 6 flèches percèrent le cocher Salya, 3 autres déchirèrent le parasol de Carna, brisèrent son étendard et son arc, une lui traversa la tête. Combien de flèches avait Arjuna (le fils de Prit'ha)?

Ici, ce sera un exemple de la règle de trois :

Si une esclave de 16 ans coûte 32 niskhas, combien en coûte une de 20 ans?

L'auteur regarde évidemment l'âge et le prix d'une esclave comme inversement proportionnels, mais il se borne à dire que la valeur des êtres vivants s'estime selon leur âge.

Les exemples suivants de règle de trois composée sont un peu plus sobres :

30 madriers de 12 et 16 pouces d'épaisseur et de largeur, et de 14 pieds de long coûtent 100 niskhas; que coûtent 14 madriers de 8 et 12 pouces d'épaisseur et de largeur, et de 10 pieds de long? Si le transport des premiers madriers coûte 8 drachmes par mille, combien coûtera le transport des derniers sur un espace de 8 milles?

Et encore, dans une telle question, il ne saurait y avoir pratiquement de proportionnalité entre le prix et la grandeur du madrier, ou la quantité de bois qu'il faut transporter : on peut donc bien dire, d'une façon générale, que ces problèmes sont inventés à plaisir, et comme purs exercices de calcul.

Ces quelques exemples suffisent à montrer les sources variées auxquelles sont puisées les questions; ailleurs, ce sera tantôt un nombre de fleurs, tantôt le taux d'un intérêt, tantôt une grandeur géométrique que l'on cherche, et la richesse même des formes dont on les revêt trahit la satisfaction pure que l'on éprouvait à poser et à résoudre ces problèmes. C'est,

au reste, dans le même esprit qu'un écrivain du VII[e] siècle termine son Livre par ces mots : « Comme le Soleil surpasse en éclat les étoiles, ainsi l'homme sagace obscurcira la gloire des autres hommes en sachant proposer, dans l'assemblée du peuple, des problèmes algébriques — et surtout les résoudre. »

4. — Algèbre et théorie des nombres; Géométrie.

Nous arrivons maintenant à considérer l'Algèbre que Bhâskra, en particulier, traite dans son *Vijaganita* ou Calcul de racines : on peut dire simplement que c'est un calcul accompagné de ses démonstrations. Ces démonstrations, toutefois, ne sont pas conduites avec la rigueur grecque : elles consistent essentiellement à ramener les problèmes à une équation, dont la solution prouve la justesse des calculs mêmes qui servent à résoudre ces problèmes, mais, du moins, on saisit ainsi, en partie, comment furent trouvées les règles de calcul données par le *Lîlâvatî*.

L'Algèbre indienne concorde avec celle de Diophante en ceci qu'elle s'est débarrassée de la représentation géométrique, et ne traite que les nombres en tant que nombres. Mais, pour le Grec qu'était Diophante, il fallait que les quantités issues du calcul fussent des nombres *rationnels*, tandis que les Indiens, à logique moins subtile, n'éprouvaient aucun scrupule pour appliquer aux nombres irrationnels les règles de calcul des nombres rationnels : et cette circonstance, précisément, permit beaucoup plus d'ampleur à leurs opérations. Au lieu des transformations pour les irrationnelles, faites dans Euclide sous forme géométrique, nous rencontrons chez les Indiens le calcul direct sur les nombres irrationnels : ils avaient d'ailleurs des règles pour procurer aux fractions des dénominateurs rationnels et, ce qu'Euclide opère sous forme géométrique, pour supprimer une double irrationalité ; ils savaient même que

$$\sqrt{16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6},$$

exemple que l'on a vraisemblablement obtenu au moyen du calcul inverse.

Sous d'autres rapports encore, les Indiens dépassaient les bornes qu'un Grec prudent devait s'imposer : ainsi, n'ayant pas introduit la notion des *quantités négatives*, les Grecs devaient prendre garde que les deux membres d'une équation fussent toujours positifs pour la valeur de l'inconnue qui doit y satisfaire; et si un problème une fois posé aboutissait de lui-même à un résultat négatif, le Grec, qui savait s'expliquer la raison d'un tel fait, devait s'en servir pour changer la forme de l'énoncé, de manière qu'il ne fût plus question que de trouver la quantité correspondante et positive. Les calculateurs indiens, eux, s'en tenaient davantage aux calculs, et à leurs résultats tels quels : ils ne s'inquiétaient nullement de savoir jusqu'à quel point les membres de l'équation exprimée étaient véritablement positifs ou négatifs, et, quand la quantité cherchée se présentait négative, souvent, sans doute, ils rejetaient une racine de cette nature, mais, souvent aussi, ils savaient se débrouiller avec elle, en la désignant simplement comme une dette. Ils établirent également des règles pour calculer des quantités précédées de signes, mais ils ne les appliquèrent tout d'abord qu'à traiter les termes séparés dans des calculs sur des polynomes : partant de là, on connaissait l'existence du double signe d'une racine carrée et, en conséquence, on attribuait deux racines à une équation du second degré — cependant, lorsque l'une d'elles était négative, on la rejetait le plus souvent.

Une autre preuve d'heureuse interprétation, c'est la juste explication qu'on trouve chez eux du symbole $\frac{a}{o}$ — néanmoins il faut dire que l'on rencontre aussi des emplois tout à fait inexacts de grandeurs ainsi formées.

En ce qui concerne les moyens d'analyse, les Indiens employaient, comme Diophante, des symboles qui étaient en réalité des abréviations de mots, pour représenter les quantités cherchées et leurs puissances; mais ils allaient plus loin que Diophante, puisqu'ils pouvaient désigner, en même temps, plusieurs inconnues différentes. C'est ce qu'ils parvenaient à faire en donnant à chacune d'elles une *couleur* distincte, dont ils abrégeaient aussi le nom, et cette extension du langage symbolique occasionna, à son tour, une exten-

sion du calcul sur les quantités exprimées par un tel langage.

Ces ressources, améliorées de la sorte, devaient constituer un avantage pour les Indiens dans le traitement des équations déterminées à une ou plusieurs inconnues, et cependant, sur ce terrain, nous ne trouvons chez eux rien d'autre que ce que savaient faire les Grecs eux-mêmes, auxquels ils étaient certainement redevables de la solution des équations du second degré. En revanche, nous rencontrons une innovation notable dans le domaine des équations indéterminées : elle consiste en ce que les Indiens ne s'y contentaient point, comme Diophante, de solutions rationnelles, mais voulaient des solutions en nombres entiers.

Ils eurent ainsi déjà l'occasion de s'occuper d'équations indéterminées du premier degré : et, pour résoudre une telle équation en nombres entiers, ils employaient à peu près les mêmes calculs que ceux que l'on fait aujourd'hui pour la solution de cette question au moyen des fractions continues. Cependant, comme les règles sont données sans démonstration, nous ignorons comment elles furent découvertes et nous ne voulons, en conséquence, faire qu'une remarque à ce sujet : on peut facilement parvenir à ces règles sans introduire expressément la notion des fractions continues et de leurs convergentes.

D'abord, il est évident qu'on peut, en multipliant par c, déduire les solutions de l'équation

$$ax - by = c$$

de celles de l'équation

$$ax - by = 1;$$

si, dans cette dernière, $a > b$, et si l'on obtient, à la division de a par b, le quotient q et le reste r, on a

$$y = qx + \frac{rx - 1}{b};$$

une détermination de x, telle que $\frac{rx - 1}{b} = z$ soit un nombre entier, dépend alors d'une équation à coefficients plus simples. A la réduction, on a exactement les mêmes

nombres que quand on cherche la plus grande commune mesure, et il ne reste plus qu'à suivre la même marche jusqu'à ce que l'on arrive au coefficient 1 : après quoi, l'insertion concorde avec le calcul des convergentes d'une fraction continue.

Ils ne s'occupaient pas seulement d'une seule équation à deux inconnues, mais aussi de systèmes d'équations à un plus grand nombre d'inconnues. Ainsi, les problèmes se proposent souvent de trouver un nombre qui, divisé par différents nombres donnés, donne des restes donnés.

Il se peut que, originellement, ces problèmes viennent des Chinois chez qui l'on a trouvé une règle ancienne pour les résoudre : souvent, d'ailleurs, ils concernent la détermination des périodes astronomiques au bout desquelles certains phénomènes se reproduisent simultanément, par exemple pour les éclipses, etc.; mais les longueurs de ces périodes, connues des astronomes grecs, ne donnent lieu, il est vrai, qu'à des équations homogènes.

Si, d'une part, on demande quel est l'intervalle de temps qui comprend un nombre entier, et de jours, x, et d'années, t, on aura, puisque 30 ans égalent 10960 jours,

$$10960\,t = 30\,x$$

ou

$$\frac{x}{10960} = \frac{t}{30}.$$

Si, au contraire, on demande quand se produira la rencontre des phénomènes en question, on obtient des équations complètes indéterminées : par exemple, s'il manque $\frac{m}{n}$ jours pour arriver au terme du jour et $\frac{p}{q}$ années pour être à la fin de l'année, et que l'instant où le nouveau jour coïncidera avec l'année nouvelle doive arriver après $\left(x - \frac{m}{n}\right)$ jours $= \left(t - \frac{p}{q}\right)$ années, on aura

$$10960\left(t - \frac{p}{q}\right) = 30\left(x - \frac{m}{n}\right).$$

Bhâskara simplifie toutefois la question en supposant que, dans les fractions, le dénominateur $q = 10960$, avec $n = 30$, ce qui permet, du moins, d'obtenir une certaine approximation.

On résout facilement l'équation $xy = ax + by + c$: on la transforme en $(x - b)(y - a) = c + ab$, puis il ne s'agit plus que de décomposer $c + ab$ en un produit de facteurs entiers.

Mais les Indiens surmontèrent de plus grandes difficultés que celles-ci dans le traitement d'équations indéterminées, du deuxième degré par rapport à chacune des inconnues; et non seulement comme Diophante, leur initiateur probable pour ces questions, ils cherchent pour ces équations des solutions rationnelles, mais aussi des solutions *entières*. Ils s'occupèrent particulièrement d'équations de l'espèce

$$(1) \qquad y^2 = ax^2 + b,$$

forme à laquelle se réduisent encore d'autres équations indéterminées du second degré.

Pour donner une idée de leur mode de traitement, nous allons reproduire ici leur solution de l'équation particulièrement importante

$$(2) \qquad y^2 = ax^2 + 1,$$

qui, beaucoup plus tard, sous le nom d'*équation de Pell*, devait préoccuper les mathématiciens d'Europe : elle se présente quand il s'agit, au moyen d'une fraction $\frac{y}{x}$, d'exprimer le plus exactement possible la racine carrée d'un nombre a, non carré.

Commençons donc par un procédé, différent de celui de Diophante, mais à l'aide duquel ils savaient obtenir un nombre illimité de solutions rationnelles : formons, d'abord, les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} ax_1^2 + b_1 = y_1^2, \\ ax_2^2 + b_2 = y_2^2, \end{cases}$$

où b_1 et b_2 se déterminent en choisissant arbitrairement x_1, y_1, x_2 et y_2; résolvant ces équations par rapport à b_1 et b_2, le produit de ces deux quantités peut s'écrire

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2;$$

voici donc une troisième équation,

(4) $$\left\{\begin{array}{l} ax_3^2 + b_3 = y_3^2 \\ \text{pour laquelle} \\ b_3 = b_1 b_2, \qquad x_3 = x_1 y_2 + x_2 y_1, \\ \qquad\qquad\qquad y_3 = a x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{array}\right.$$

En identifiant alors les deux équations (3), on a

$$a(2x_1y_1)^2 + b^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

ou

(5) $$a\left(\frac{2x_1y_1}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\right)^2,$$

et l'on possède bien ainsi une solution rationnelle de l'équation (2); si l'on veut alors poursuivre, en insérant des valeurs arbitraires pour x_1 et y_1, on peut souvent obtenir des nombres entiers comme valeurs de x et de y.

Il faut, en particulier, remarquer les cas où l'on parvient à trouver déjà que $b = \pm 1$, ou ± 2.

Si $b = 1$, on peut, en suivant cette marche, d'une solution de (2) tirer une solution nouvelle et, ensuite, autant de solutions que l'on en désire; si $b = -1$, ou ± 2, (5) donnera à son tour une solution de (2) en nombres entiers, car de $y_1^2 - ax_1^2 = \pm 2$ on déduira que $ax_1^2 + y_1^2 = 2ax_1^2 \pm 2$, ou bien est égal à un nombre pair. En même temps la connaissance d'une solution de (2), en vertu de (4), permet de tirer, d'une solution de (1), des solutions en nombre indéfini.

Cependant, pour une valeur donnée de a, si les essais successifs sont impuissants à établir une équation de la forme (1), pour laquelle b soit égal à ± 1 ou ± 2, alors on se servira de la méthode dite *cyclique* pour réduire la valeur de b : soit, par exemple,

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2$$

une équation dans laquelle b_1 est déjà aussi petit qu'on le put obtenir par des essais qui peuvent consister à faire de $\frac{y_1}{x_1}$ une valeur approximative de $\sqrt{a}$; x_1 et b_1 n'ont alors aucun

facteur commun, car un tel facteur, dans les deux membres de l'équation posée, serait un facteur carré, et l'on pourrait avoir une équation plus simple de même nature. On considère

$$\frac{x_1 z + y_1}{b_1} = x_2,$$

équation pour laquelle x_2 et z se laissent déterminer comme nombres entiers, et l'on choisit ceux qui rendent $z^2 - a$ aussi petit que possible : et si l'on pose alors

$$\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2,$$

b_2 est un nombre entier, et $ax_2^2 + b_2$ un nouveau nombre carré y_2^2.

Ce fait est facile à établir, et, cependant, les écrivains indiens ne le démontrent point, pas plus qu'ils ne prouvent que l'on peut effectivement, de la sorte, parvenir à $b = 1$: ils ne possédaient sûrement pas la sagacité mathématique suffisante pour établir théoriquement ce dernier point, dont la démonstration est due à Lagrange qui, de son côté, devait retrouver cette solution. Toutefois, les essais numériques des Indiens avaient abouti à une marche parfaitement juste : ils attendaient même toujours un bon résultat de l'emploi de cette méthode, et c'est là une preuve de leur grande habileté pour le calcul.

Outre des méthodes qui relèvent, comme la précédente, de la théorie des nombres, les Indiens possédaient encore diverses propositions de cette même théorie, entre autres la suivante : les quantités

$$\left[\frac{\left(\frac{8p^2-1}{2p}\right)^2}{2} + 1\right]^2 \pm \left(\frac{8p^2-1}{2p}\right)^2 - 1,$$

sont deux carrés.

Disons également ici qu'ils connaissaient et employaient les formules servant à dénombrer les permutations et les combinaisons, ainsi que, comme les Grecs, celles des sommes des carrés et des cubes des premiers nombres entiers.

Nous n'avons, d'autre part, aucune raison de nous arrêter à la Géométrie des Indiens : la plupart des théorèmes de leur connaissance étaient certainement dus aux Grecs, bien qu'ils aient souvent poussé plus loin que ceux-ci le calcul fondé sur ces théorèmes.

Un théorème de Brahmagoupta doit cependant attirer l'attention, considéré comme une extension aux quadrilatères de la formule de Héron pour les triangles : tel quel, ce théorème énonce que la surface d'un quadrilatère quelconque est représentée par $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, où a, b, c, d sont les côtés et s leur demi-somme; Bhâskara, déjà, l'entendait ainsi, et c'est donc avec raison qu'il s'arrête à cette hypothèse erronée qui consiste à dire qu'un quadrilatère est déterminé par ses côtés. En réalité, Brahmagoupta ne traite que deux classes déterminées de quadrilatères inscrits, pour lesquels le théorème est exact, mais il se peut fort bien qu'il n'ait tenu aucun compte de cette distinction qu'il n'exprime pas dans ses énoncés; les quadrilatères dont il s'occupe sont : pour une part les trapèzes isoscèles, d'autre part les quadrilatères inscrits à diagonales rectangulaires.

Encore que cela ne ressorte pas nettement, il est vrai, dans Brahmagoupta, les Indiens peuvent avoir eu, néanmoins, comme raison de s'occuper de ces derniers quadrilatères, ce fait que dans leur Trigonométrie ils se servaient, non comme Ptolémée de Tables de cordes, mais de Tables de sinus. En effet, le diamètre du cercle étant égal à 1, et deux arcs qui se rencontrent étant respectivement égaux à $2x$ et à $2y$, on voit que les côtés du quadrilatère sont $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ et $\cos y$, et que les diagonales se divisent suivant les produits $\sin x \cos y$ et $\sin y \cos x$, et en $\sin x \sin y$ et $\cos x \cos y$. — La figure est ainsi, vraisemblablement, celle même que l'on employa pour la détermination de $\sin(x+y)$.

Les Tables de *sinus* et de *sinus verses*, qui se trouvent dans le *Sourya Siddhânta*, ne descendent cependant pas au-dessous d'intervalles de $3°\frac{3}{4}$, tandis que les Tables de cordes d'arc de Ptolémée correspondent à des Tables de *sinus* qui auraient un intervalle de $0°15'$. Si ces Tables, comme tant d'autres parties de ce Livre, sont d'origine grecque, elles doivent donc provenir d'Ouvrages plus anciens que ceux de

Ptolémée; peut-être alors faudrait-il en faire remonter l'origine aux astronomes alexandrins qui ont pu, au contraire d'Hipparque et de son école, employer des Tables de *sinus*. Cependant, le mérite d'avoir remplacé les Tables de cordes d'arc par des Tables de *sinus* peut fort bien appartenir aux Indiens; leur sens du calcul pratique dut vite leur faire découvrir les avantages de ces dernières, qui se rapportent immédiatement aux angles des triangles rectangles.

En tous cas, c'est à une origine indienne qu'il faut probablement faire remonter une loi empirique pour la formation successive des *sinus*, déduite de l'examen de leurs différences premières et secondes; au contraire, pour employer la Table des *sinus*, ils se servaient, dans leurs calculs astronomiques, des règles contenues dans l'*Analemme* de Ptolémée (p. 193).

Il n'est point impossible, par ailleurs, que la valeur approximative de π, $\frac{31416}{10000}$, qui se trouve dans *Âryabhatta*, soit d'origine grecque, car nous savons, en effet, qu'Apollonius déterminait π plus exactement qu'Archimède; mais, en revanche, l'approximation $\pi = \sqrt{10}$ rencontrée dans Brahmagoupta, est certainement trop arbitraire pour remonter aux Grecs.

Nous ne rencontrons pas davantage de types grecs et relatifs à une formule approximative qui permette de calculer la corde k d'un arc donné, formule qui se trouve dans Bhâskara et que voici :

$$k = 4d\,\frac{b(p-b)}{\frac{5}{4}p^2 - b(p-b)};$$

d est le diamètre, p la circonférence et b la longueur de l'arc.

LE MOYEN AGE.

1. — Introduction générale.

Nous avons vu que, dès l'antiquité, les Grecs avaient édifié une Géométrie qui traitait les rapports d'espace d'une manière si complète, et avec une telle sûreté de conclusions, qu'elle peut maintenir son rang de science, même vis-à-vis des plus sévères exigences des temps modernes; et, d'autre part, puisque les formes géométriques constituent en même temps un moyen de représenter les grandeurs continues, en général, cette Géométrie renferme donc aussi une bonne partie de ce que nous appelons actuellement la *Mathématique pure*. Sous cette forme, l'Algèbre comprit la solution des équations du second degré, et des applications très étendues de ces équations : elle fut poussée jusqu'au traitement d'équations du troisième degré, traitement qui ne comportait point, sans doute, la réduction à des radicaux selon le procédé actuel de résolution, mais qui, cependant, par l'emploi de la théorie des sections coniques, permettait de discuter et d'étudier théoriquement les problèmes qui dépendent de ces équations; par là même, cette méthode était encore applicable à des problèmes qui eussent dépendu d'équations du quatrième degré, sans toutefois qu'il fût jamais question de poser directement de pareilles équations.

A côté de ces questions, qui se rapportent à l'analyse finie, les Grecs avaient également abordé des problèmes qui dépendent aujourd'hui du Calcul intégral, et, quoique cet essai n'ait pu embrasser un grand nombre de questions particulières, il fut toutefois entrepris sous des formes dont la grande valeur scientifique est d'autant plus appréciée, de nos jours, que nos exigences scientifiques se font plus grandes.

Enfin, nous avons vu que l'application numérique des Mathématiques se développa peu à peu pour les besoins

croissants de l'Astronomie, et nous avons rencontré chez Diophante des échantillons d'une pénétrante investigation à propos des conditions numériques de rationalité.

Par ailleurs, l'antique habileté des Indiens dans le maniement des nombres s'était épanouie en une véritable Arithmétique. Ils employaient le *système de position*, comme nous le faisons aujourd'hui, et le contact des Mathématiques grecques suscita, chez eux, des progrès originaux : le fait le plus important à leur actif fut de traiter d'une façon satisfaisante les questions qui concernent les nombres entiers. Néanmoins, quelques-uns de ces progrès se rattachent peut-être bien à une époque où la rénovation des travaux mathématiques avait déjà commencé chez les Arabes.

Pour estimer à sa juste valeur le mérite des peuples auxquels, après les Grecs et les Indiens, revient le développement des Mathématiques, il faut considérer combien elles étaient loin encore d'être commodément accessibles aux peuples nouveaux. Elles étaient même peu accessibles aux Grecs d'une époque plus récente : et si, pour les œuvres conservées de l'époque antérieure, ils avaient pu garder en tout cas, ou du moins reprendre, de temps en temps, l'exacte intelligence des détails, ces œuvres ne leur fournirent point, du moins, la vue d'ensemble sans laquelle il est impossible de pousser plus avant. D'ailleurs, elles ne donnaient aucune espèce de renseignements sur les méthodes autrefois si fécondes en résultats importants, et toute tradition utile à cet égard était depuis longtemps perdue : il fallut donc retrouver soi-même ces méthodes, ou d'autres, avant qu'il ne pût être question de s'approprier entièrement la teneur des susdites œuvres — bien plus, maint résultat ne put être reconnu comme ayant appartenu aux Grecs, avant d'avoir été retrouvé sous une autre forme.

Néanmoins, durant toute cette résurrection des Mathématiques, l'apport des Grecs ou bien encore ce que, petit à petit, l'on apprenait à comprendre dans leurs travaux, allait, bien entendu, excellemment servir à guider et à initier les esprits.

Dans ces conditions, et grâce à son usage pratique très facile, l'Arithmétique indienne offrait plus de chances de pénétrer dans les endroits où l'on avait occasion d'en faire

connaissance. Cependant, il faut aussi remarquer ici qu'il ne suffit point d'en posséder les principes pour la pouvoir apprécier à sa juste valeur : nous-mêmes, nous ne pouvons l'employer sans une certaine somme d'efforts, dès notre enfance, pour en apprendre par cœur les Tables les plus simples, et pour nous rompre à son maniement. — Ses avantages ne frappaient donc pas immédiatement : et cela, peut-être, d'autant plus que les gens étaient déjà versés dans d'autres méthodes.

Les héritiers immédiats des Mathématiques grecques, au terme de l'ère antique, héritiers des quelques œuvres capitales qui aient été conservées, et de l'intelligence sans cesse décroissante de ces œuvres, furent l'Empire romain d'Orient et la civilisation gréco-catholique qui avaient pour capitale commune Constantinople. Encore que, par la suite, des influences d'origine indienne aient pu venir s'y faire sentir, en fait, nous ne rencontrons toutefois à Constantinople que la continuation du marasme commencé : les Ouvrages subsistants des grands géomètres grecs, cet héritage du passé, furent ensevelis sans qu'on en tirât aucun parti — et ils ne devaient être déterrés qu'à la fin du moyen âge, pour servir alors utilement à la culture européenne.

D'ailleurs, avant que cette renaissance n'eût lieu, une partie au moins de ces travaux, compris de nouveau et vivifiés par un intérêt renaissant, avait fait retour en Occident par une tout autre voie : par les Arabes.

Un tel héritage du passé n'échut pas aux peuples qui, par invasion, devaient prendre le premier rôle dans l'Europe occidentale : ces peuples, en effet, adoptèrent le christianisme et participèrent à la civilisation romaine, tandis que les Mathématiques n'étaient pas du domaine de celle-ci. Autrefois, les romantiques ont prêté au moyen âge d'Occident un éclat qui est sûrement inexact sous bien des rapports, cependant que l'on est souvent porté, aujourd'hui, à tomber dans l'excès contraire et à ne parler que des ténèbres du moyen âge : ce jugement, lui aussi, risque d'être erroné à beaucoup de points de vue, et, notamment, si l'on considère le degré de civilisation dans lequel se trouvaient la plupart des peuples en question, au début du moyen âge, et celui

qu'ils atteignirent à la fin. En réalité, ce qu'ils avaient pris, soit au christianisme, soit aux lois et institutions romaines, fut refondu par des hommes laborieux, principalement dans les cloîtres, en vue d'un intérêt spirituel; et la valeur propre de ces acquisitions, leur influence civilisatrice, fut pour les peuples une véritable bénédiction.

Mais, en ce qui concerne plus particulièrement les Mathématiques, on ne les pouvait alors connaître que par des extraits insuffisants, effectués par les arpenteurs romains dans les règles pratiques des Égyptiens ([1]) ainsi que dans celles de Héron, tout au plus par des fragments d'Euclide ou de Nicomaque : les successeurs des arpenteurs, plus théoriciens mais aussi peu scientifiques que ceux-ci, devaient présenter ces fragments sous des formes qui prêtaient à bien des méprises, telles que de prendre des nombres figurés pour des expressions de surfaces.

La partie la plus utile — et la plus pratique — de l'héritage mathématique partiel reçu des Romains, qui la tenaient eux-mêmes des Grecs, fut la Table à compter, l'abaque, qui allait être perfectionnée de la manière suivante à une époque qu'il serait difficile de préciser ([2]) : les marques, ou jetons, qu'on plaçait sur les différentes colonnes de la Table, au lieu d'être semblables et de désigner par leur nombre celui des unités décimales auxquelles appartenaient les colonnes, comprirent désormais neuf signes distincts, qui correspondaient aux nombres de 1 à 9. — Au total, ce legs était évidemment fort peu de chose si l'on doit le comparer à ce que les Égyptiens, de leur temps, avaient transmis aux Grecs.

([1]) La dépendance des *Agrimenseurs* romains, par rapport à Héron et à la tradition égyptienne, est gravement mise en doute depuis qu'il semble prouvé que Héron était au moins d'un siècle postérieur à Auguste ; les connaissances des *Agrimenseurs* paraissent plutôt dériver, par l'intermédiaire du polygraphe Varron, d'une part des disciplines étrusques, de l'autre de sources grecques en partie perdues (T.).

([2]) Si ce perfectionnement est sûrement antérieur à Gerbert, il n'est point prouvé qu'il le soit à l'introduction des chiffres arabes en Espagne ; c'est peut-être dans ce pays qu'il a été réalisé (par des commerçants juifs ?) pour continuer à se servir de l'*abacus* romain, qui dispensait d'écrire, tout en profitant des avantages de la nouvelle numération (T.).

Cependant, tant dans les cloîtres que dans les villes commerciales du sud de l'Europe, surtout les italiennes, il y avait un terrain propre à la culture des Mathématiques grecques, — ce que l'on vit bien lorsqu'elles revinrent en Europe sous une meilleure forme. Ce retour allait s'opérer par l'intermédiaire des Arabes : ceux-ci, d'une part, avaient acquis une droite intelligence des Mathématiques grecques, et leur avaient imprimé des progrès nouveaux qui, certainement, les rendaient plus accessibles qu'elles ne l'étaient dans les vieux écrits grecs conservés; d'autre part, ils y avaient ajouté, dans une large mesure, l'Arithmétique indienne. Sans doute, après leur rencontre avec les Arabes à propos des croisades, ou bien aussi tant en Espagne qu'en Sicile, il fallut quelque temps pour que les Européens s'appropriassent leurs Mathématiques et, du même coup, une partie des Mathématiques et de l'Arithmétique grecques et indiennes; toutefois, c'est durant cette assimilation que se prépara le mouvement d'innovation, de développement rapide, coïncidant, au commencement du XVI[e] siècle, avec les grands progrès effectués en d'autres directions et qui marquent la date initiale des temps nouveaux.

De tout ce qui vient d'être dit il ressort que la part la plus précoce — et la plus considérable — du développement des Mathématiques au moyen âge revient bien aux Arabes. Pour ce qui est des conditions extérieures elles-mêmes de ce développement, j'attirerai tout d'abord l'attention sur la prodigieuse rapidité avec laquelle les Arabes, et à leur suite le mahométisme, étendirent leurs conquêtes sur une étendue immense de pays : bientôt alors, par l'acceptation de la religion musulmane, les indigènes de ces régions ne firent plus qu'un avec les Arabes, et de nombreuses contrées furent ainsi liées les unes aux autres; or, parmi ces territoires, se trouvait l'Égypte, antique berceau de la Géométrie, avec Alexandrie où cette science s'épanouit le mieux et continua le plus longtemps à donner des signes réels de vitalité — de même que d'autres parties encore, peuplées par les Grecs, ou influencées par la culture hellénique.

Les Arabes envahirent également les régions qui avaient été, jadis, le séjour des astronomes babyloniens et chaldéens :

ils poussèrent jusqu'à l'Inde et, de la sorte, furent en contact avec l'Arithmétique indienne beaucoup plus directement que ne l'avaient été les Grecs.

Mais un tel concours de circonstances favorables ne suffit pas encore pour que l'on pût s'approprier aussi complètement les Mathématiques alors existantes : n'avons-nous pas vu que pendant fort longtemps, pour les Grecs eux-mêmes, la science grecque est restée un trésor inerte? que les Romains, qui avaient eu la même occasion que désormais les Arabes de participer aux Mathématiques grecques, et cela à une époque où celles-ci n'avaient encore que fort peu perdu de leur fraîcheur originelle, n'avaient pas su mettre à profit cette occasion? Peut-être, il est vrai, la civilisation nationale romaine était-elle, malgré ses bornes, trop vaste et trop considérable pour assimiler ce qui concerne les branches les plus difficiles de la science grecque, et spécialement les Mathématiques : les Romains ne surent point devenir d'aussi bons écoliers que le furent, d'une part, les peuples barbares de l'invasion en Occident par rapport à cette civilisation romaine elle-même et, d'autre part, les Arabes, ce peuple si jeune, vis-à-vis de ce qui restait de la civilisation grecque.

Tous les souverains arabes ne se montrèrent pas, en effet, aussi haineux vis-à-vis de la science que le fut Omar, deuxième successeur du Prophète, encore qu'il ne faille pas lui imputer la plus grave des destructions, les incendies réitérés de la bibliothèque alexandrine : elle eut lieu avant lui, et avant l'époque des Arabes. Des dynasties entières de princes allaient s'élever, au contraire, qui mirent leur honneur à favoriser l'essor de la Science et qui crurent même augmenter par là leur propre autorité : parmi eux contentons-nous de nommer la série des Abbassides, Almansour, Hâroun Arraschid et Almamoun (754-833) qui succédèrent à la race d'Omar et fondèrent en 762 Bagdad, dont ils firent leur résidence. C'est dans cette ville que, longtemps encore après les Abbassides, se maintint le foyer des Mathématiques arabes; on y rattache les mathématiciens postérieurs les plus considérables et les plus dignes de mention.

Là, également, après la conquête de Bagdad par les Mongols (1258), l'astronome et mathématicien Nassîr Eddîn sut assurer

à sa science une situation favorisée; là, aussi, au XVe siècle, et après une nouvelle invasion de barbares, domina le plus récent des mathématiciens de l'époque arabe que nous ayons à nommer, le prince tartare Oloug-Beg (1). Depuis Bagdad, d'ailleurs, la science s'était étendue jusqu'aux plus lointaines contrées du vaste monde musulman : et un fait assez important pour le développement ultérieur des Mathématiques, c'est la formation d'une école arabe d'Occident, qui put alors servir d'intermédiaire scientifique aux peuples de l'Europe occidentale.

Sous les Abbassides les *Éléments* d'Euclide et la *Syntaxe* de Ptolémée furent traduits en arabe; plus tard, c'étaient les Traités de Diophante, Héron, Archimède, Apollonius et, en plus de ces œuvres capitales, les Arabes ont connu un ouvrage actuellement perdu d'Hipparque sur les équations du second degré. De même, dès l'époque d'Almansour, on commence à traduire les œuvres astronomiques indiennes, les *Siddhântas*, appelés *sindhind* par les Arabes : on y puise l'usage du *sinus* et, avant tout, l'Arithmétique indienne qui devait encore se répandre par les relations commerciales.

Quant aux autres progrès des Mathématiques dont nous soyons redevables aux Indiens, ils semblent au contraire avoir eu fort peu d'influence sur les Arabes, qui se considéraient avec raison comme élèves des Grecs, surtout au point de vue scientifique, et qui négligèrent les théories moins solidement fondées, comme celles qu'ils eussent pu emprunter aux Indiens.

La traduction des œuvres grecques les plus difficiles nous est la meilleure preuve que, à la longue, on en était arrivé au point de développement où ces œuvres pouvaient être étudiées et comprises; et, d'après ce que nous avons dit déjà précédemment à ce sujet, il résulte qu'un tel développement ne fut pas atteint sans exiger un labeur personnel considérable de la part des Arabes. Nous avons un témoignage de l'amplitude de ce travail, et de la façon sérieuse avec laquelle

(1) Si Nassir Eddîn dirigea l'observatoire de Meragha, construit aux frais d'Houlagou, c'est à Bagdad qu'il mourut en 1274. Mais au temps d'Oloug-Beg, qui résidait à Samarcande, la suprématie intellectuelle de Bagdad était déjà bien déchue (T.).

s'y préparait chaque mathématicien, dans ce qu'on nous rapporte du traducteur de Diophante, Aboul Wâfa, dont nous aurons encore l'occasion de mentionner bientôt les mérites originaux : dans sa jeunesse, il étudia l'Arithmétique spéculative et l'Arithmétique pratique (c'est-à-dire l'Algèbre et l'Arithmétique) avec deux maîtres et, chez deux autres maîtres encore, la Géométrie.

2. — L'Arithmétique et l'Algèbre des Arabes.

J'ai essayé ici, en particulier par comparaison avec les Romains, de faire ressortir la valeur et l'étendue des travaux mathématiques chez les Arabes afin qu'on n'aille point tirer, pour eux, d'humiliantes conclusions, sous prétexte que les résultats positifs qu'ils ont atteints, en dehors de ce que les Grecs savaient déjà, sont relativement pauvres; d'un autre côté, cette dernière circonstance, précisément, va m'obliger à m'occuper des Arabes beaucoup moins que les proportions mêmes de leur œuvre ne sembleraient par ailleurs l'exiger. Sans doute, nous citerons leurs plus notables écrivains en Mathématiques, mais surtout comme types, pour montrer dans quels sens ils travaillaient en général, bien plutôt que comme individualités important à l'exposition cohérente de leurs Mathématiques, et de l'évolution même de cette Science.

Le temps n'est pourtant pas si loin derrière nous où, faute de bien comprendre les écrivains grecs conservés, et de suffisamment connaître les Mathématiques indiennes, on attribuait à ces Arabes tout l'honneur, tant pour l'Algèbre que créèrent les Grecs, que pour l'Arithmétique due aux Indiens; cette erreur est même consacrée par la dénomination d'*Algèbre,* et par une autre expression mathématique, celle d'*algorithme*, longtemps usitée pour désigner la numération qui se rattache au système de position, mais que nous élargissons aujourd'hui en l'appliquant à tout système de désignations et de conventions qui permette de calculer mécaniquement suivant certaines règles. Ces deux appellations proviennent d'un seul individu : à leur emploi se rattachait l'idée que l'on devait à cet auteur l'invention, et de l'Algèbre, et de la numération actuellement en usage.

Cet homme, c'est Mohammed ibn Mousâ Alkhovarizmi : il était du groupe des savants que le kalife Almamoun chargea de traductions, de la mesure d'un degré du méridien pour la Géographie, et d'autres travaux scientifiques. Le mot *algorithme* n'est autre que son propre surnom, devenu le titre de l'un de ses Ouvrages sur l'Arithmétique et dans lequel sont exposées des règles permettant de calculer avec des nombres écrits d'après le système de position; plus tard, le même nom fut donné aux Ouvrages qui devaient répandre en Europe le calcul indien, puis, enfin, à ce calcul lui-même.

On connaît d'ailleurs l'Ouvrage en question par une traduction latine qui commence par ces mots : *Dixit Algorithmi* : on y trouve des éclaircissements à propos de l'écriture des nombres, sur les quatre opérations fondamentales avec des nombres entiers et sur les fractions simples, tandis que la duplication et la division par deux y sont indiquées comme des opérations spéciales. Pour les trois premières opérations on y donne la preuve par neuf; tout y est expliqué en mots, et les exemples employés, du moins dans le texte latin conservé, y sont exposés, non en nombres chiffrés, mais en nombres écrits tout au long ou bien à la romaine. — Il y manque cependant l'explication de ce qu'il faut faire, pour la soustraction, dans le cas où un chiffre du nombre à soustraire est plus fort que le chiffre correspondant du nombre dont on soustrait.

On comprend facilement que la traduction d'un tel Ouvrage ait été impuissante à rendre de sitôt l'Arithmétique indienne accessible aux Européens, mais, toutefois, le fait qu'il soit une production arabe prouve suffisamment que, dès lors, l'Arithmétique indienne était connue de ce peuple : elle put ensuite se répandre au moyen de ce livre même, convenablement élucidé, et dans lequel l'auteur désigne expressément comme indienne sa méthode de calcul.

Ce n'est point davantage la faute de Mohammed si l'on a voulu lui attribuer plus tard l'invention de l'Algèbre : il rapporte simplement qu'il fut invité par Almamoun à écrire, sur *Aldschebr* et *Almukâbala,* un court Ouvrage qui se bornât au plus utile et au plus usuel de l'Arithmétique et de ses applications pratiques; et ces deux mots doivent ainsi

signifier quelque chose de préalablement connu, puisqu'il juge même superflu d'en donner une explication. Au reste, nous pouvons être renseignés par le sens philologique, et par quelques éclaircissements ultérieurs : le premier mot signifie l'opération par laquelle, ayant des termes à enlever à l'un des membres d'une égalité, on les peut adjoindre à l'autre de façon que chacune des deux quantités égales ne comprenne que des termes positifs; l'autre mot signifie l'opération, qui vient ensuite, par laquelle, une fois que chaque membre de l'équation ne contient plus que des termes positifs, on réduit (par suppression dans un membre et par diminution équivalente dans l'autre) les termes qui sont de même nature (c'est-à-dire de même degré en x), en sorte que, finalement, l'équation ne contient plus, pour chaque degré, qu'un seul terme positif, situé dans l'un ou l'autre des deux membres.

Ainsi, par la première opération, l'équation

$$2x^2 - 2x + 10 = x^2 + 5x + 4$$

se change en

$$2x^2 + 10 = x^2 + 7x + 4;$$

et, par la seconde, en

$$x^2 + 6 = 7x.$$

Le nom de la première de ces opérations, par où devait commencer tout traitement d'équations, a donc été étendu à l'ensemble de la science des équations, l'Algèbre : cette science et, plus tard, l'emploi systématisé de l'ensemble des symboles qui y servaient, puis enfin, en général, la théorie de toute opération sur les grandeurs à l'aide de symboles, prirent de la sorte un nom qui n'appartenait, proprement, qu'à une opération algébrique particulière, et maintenant hors d'usage. En effet, nous n'attachons plus aucune importance aujourd'hui à ce que chaque membre de l'équation posée ne renferme strictement que des termes positifs, comme le faisaient les Grecs, les Arabes et leurs successeurs immédiats en Europe; et, cependant, comme tout ce qui vient des mathématiciens grecs, cette opération avait un fondement rationnel : c'est qu'on voulait s'assurer, par cette disposition, que les deux membres d'une équation restaient positifs,

quelque valeur que dût prendre l'inconnue, puisque l'on ne reconnaissait que les quantités positives.

Dans l'Ouvrage en question, il s'agit en particulier du traitement d'équations du second degré et de l'application de ces équations, ainsi que de celles du premier degré. Tout y est exposé en *mots :* ainsi, tant que l'on traite une équation, l'inconnue se nomme la *racine,* ou la *chose* (*res*); son carré, le *carré* tout simplement [1].

La solution des équations du deuxième degré est démontrée par l'Algèbre géométrique, comme chez Euclide, mais en partie avec d'autres figures que celles dont se sert le géomètre grec; par exemple, l'équation

$$x^2 + ax = b$$

sera résolue par la figure suivante : sur les quatre côtés du carré inconnu x^2, sont élevés des rectangles de $\frac{a}{4}$ de hauteur; si les angles rentrants de la figure ainsi formée sont comblés par des carrés de $\frac{a}{4}$ de côté, alors le carré de $x + \frac{a}{2}$ de côté qui en résulte aura la valeur connue, $b + \frac{a^2}{4}$.

Cette forme de solution, qui revient encore chez d'autres auteurs arabes, et qui constitue au moins une application de l'Algèbre géométrique ne relevant pas d'Euclide, provient peut-être de travaux grecs qui nous sont restés inconnus — par exemple de l'écrit d'Hipparque, déjà mentionné, sur les équations quadratiques. Toutefois, il ne faudrait pas se figurer que l'Ouvrage de Mohammed représente seulement, de tous points, un remaniement de quelque modèle grec : on le voit dans l'application des équations à des faits pratiques de la vie — comme au droit d'héritage particulier aux Arabes — et il est également digne de remarque que Mohammed ibn Mousâ, à l'instar des Indiens, attribue deux *racines* à l'équation

$$x^2 + a^2 = bx.$$

([1]) Proprement le terme *mâl,* traduit *census* par les Occidentaux latins, signifie *pouvoir*, *fortune* (T.).

On trouve chez lui la valeur grecque $\pi = \frac{22}{7}$ et la valeur $\pi = 3{,}1416$, qui peut également l'être; mais il connaît aussi la valeur indienne $\sqrt{10}$, preuve qu'il n'a pas uniquement appris le calcul des Indiens.

En ce qui concerne la solution des équations du second degré, on voit donc que Mohammed ibn Mousà n'apporte rien d'essentiel qui ne se trouve déjà dans les écrivains grecs: et, si des générations postérieures remarquèrent chez lui ce qu'elles n'ont pas toujours trouvé chez les Grecs, quand on les connut de nouveau, la cause en est peut-être qu'il joint des exemples numériques aux solutions générales qu'il présente sous forme géométrique, tandis qu'Euclide se contente de donner ces solutions elles-mêmes, que Héron, de son côté, n'en offre que quelques applications numériques, et, enfin, que Diophante ne démontre pas du tout la solution qu'il établit.

Si, maintenant, nous sautons aux environs de l'an 1000, nous rencontrons à Bagdad deux méthodes fort diverses d'Arithmétique et de calcul. Dans un Ouvrage d'Alnasavî, nous voyons que, à ce moment, on a déjà réalisé de grands progrès dans l'emploi du calcul indien et, en même temps, dans l'exposition systématique et le traitement des quantités numériques: c'est ainsi qu'on a des désignations de fractions qui, avec nos chiffres (car les signes numériques ne sont pas les mêmes partout où l'on emploie le système de position), qui, avec nos chiffres, dis-je, auraient l'aspect des exemples suivants :

$$\frac{1}{11} = \begin{matrix}0\\1\\11\end{matrix}; \qquad 15\,\frac{7}{19} = \begin{matrix}15\\7\\19\end{matrix}.$$

Il ressort du Livre que nous mentionnons ici combien la méthode indienne de calcul avait pénétré dans les intelligences : il est donc fort surprenant de voir, au même temps et au même lieu, le remarquable mathématicien Alkarchî produire une Arithmétique dans laquelle ne se trouve absolument rien du calcul numérique indien. Les nombres y sont, au contraire, exprimés par des mots, et parfois des calculs

assez étendus sont exécutés sans l'usage des chiffres : ceci semble dénoter une résistance de parti pris à la méthode indienne, et l'on put émettre l'hypothèse, au reste fort acceptable, que cette résistance provient peut-être d'oppositions tranchées entre sectes religieuses.

Mais, à côté de ces explications, on ne doit pas laisser d'examiner si la différence entre Alnasavî et Alkarchî ne serait pas simplement attribuable à la diversité même des buts qu'ils se proposent : le premier cherche à donner les règles pour la plus simple exécution pratique des calculs ; le second, au contraire, désirait écrire un Ouvrage scientifique sur les nombres, et leur usage ; — il a donc avec raison recherché son point de départ chez les Grecs, et non chez les Indiens. S'il emprunte à ceux-ci leur règle de trois, c'est du moins en lui donnant une base solide dans la théorie des proportions d'Euclide ; et s'il omet de faire connaître tels moyens mécaniques qui, en réalité, peuvent servir à traiter aisément les calculs numériques, cette omission n'égale pas cependant celle d'Euclide lui-même, qui non seulement passe sous silence les ressources mécaniques qu'on devait avoir de son temps, mais ne donne même aucun exemple numérique.

Cependant, si Alkarchî trouve l'occasion d'expliquer une quantité de méthodes grecques de calcul, méthodes qui sont bien inférieures à celles des Indiens : cela s'explique, sans doute, par son admiration pour les Grecs, et cette admiration lui inspira naturellement pour l'ensemble de ces procédés, au point de vue théorique, un intérêt que n'éveillaient pas encore les méthodes indiennes.

De quelque façon que se puisse expliquer la différence entre les deux écrivains, toujours est-il qu'elle montre le temps qu'il fallut pour amalgamer les apports grecs et indiens, en ce qui concerne les Mathématiques et le calcul ; et, d'autre part, ces deux Livres prouvent, du même coup, que l'on disposait dès lors largement de l'une et l'autre source.

En tous cas, Alkarchî sut également opérer sur les nombres, et même utiliser dans leur traitement d'autres moyens mécaniques que ceux de son Arithmétique : nous en avons pour témoins, d'une part, les calculs étendus qui se rencontrent dans ce Livre même, et, d'autre part, son important Ouvrage

d'Algèbre, *Alfachrî* (ainsi nommé, vraisemblablement, du nom d'un personnage). Dans ce dernier écrit, il se révèle comme un éminent élève de Diophante : élève qui ne se contente pas de reprendre un très grand nombre des recherches et des exemples du maître, mais qui réalise en même temps, lui-même, des progrès considérables. Sous ce rapport il faut mentionner qu'il élargit le langage symbolique de Diophante et que, à certains endroits, il se sert même de symboles pour deux inconnues; il donne des règles plus complètes pour des calculs algébriques dans lesquels intervient une inconnue, et traite nombre d'exemples distincts de ceux que l'on trouve chez Diophante — allant jusqu'à des problèmes indéterminés de genres nouveaux.

On peut en citer, comme exemple, les équations

$$y^2 = x^3 + ax^2, \qquad z^2 = x^3 + bx^2;$$

si l'on pose

$$y = mx, \qquad z = nx,$$

on a, par suite,

$$x = m^2 - a = n^2 - b,$$

où m^2 et n^2 sont des nombres carrés, pris arbitrairement, dont la différence soit égale à $a - b$.

Toutefois nous attacherons une importance prépondérante aux progrès que nous allons aborder maintenant, et qui se rapportent plutôt à la simplification des notions théoriques; et, afin de les apprécier complètement, il faut nous rappeler qu'Alkarchî ne s'était pas uniquement assimilé les méthodes pratiques de Diophante, mais qu'il concevait parfaitement ce que comporte une démonstration dans la pensée des Grecs : il nous l'avait déjà montré dans son Arithmétique.

Néanmoins il ne donne de démonstrations géométriques que pour les solutions d'équations du second degré ; or nous savons que c'est la seule forme de démonstrations générales — suivant les Grecs : et cependant, là même, il se meut avec une plus grande aisance que les Grecs; car, dans un certain cas, il représente x^2 et ax par des segments, chose qu'un écrivain grec, dans une démonstration, n'eût pu faire qu'indirectement en changeant x^2 et ax en rectangles de même côté. Au reste il se contente d'éclaircir la plupart des règles par un exemple unique ayant pour but de montrer qu'elles

ressortent des calculs eux-mêmes; il remarque expressément, d'autre part, qu'on doit se préparer à l'intelligence des règles algébriques par les règles générales d'Arithmétique qu'il a données dans son Ouvrage antérieur — puis il promet de donner plus amplement de telles règles arithmético-algébriques dans un Ouvrage, que nous ne possédons malheureusement point.

En elles-mêmes, ces considérations n'ont peut-être rien de très original, car le calcul réel avec des nombres rationnels doit avoir également servi de type aux Grecs pour leur méthode de calcul géométrique, méthode au moyen de laquelle ils en vinrent à traiter les quantités irrationnelles à l'aide des mêmes opérations; mais ce qui importait, cependant, c'est que ces considérations fussent expressément mises en relief : on voit la même chose pour Alkarchî, dans la liberté avec laquelle il manie des radicaux irrationnels. Sans doute ces quantités ne sont pas représentées par des symboles, mais par des mots qui correspondent aux dénominations de puissances avec le même exposant; toutefois, et comme chez les Indiens, l'auteur montre nettement comment on peut calculer avec ces quantités, comment, d'une part, elles peuvent être multipliées ou divisées, quelle que soit la nature de la puissance, et comment, d'autre part, les racines carrées et cubiques peuvent s'additionner et se soustraire quand les puissances sont des nombres semblables, plans ou solides. — La démonstration de ces dernières propositions est faite, non par l'introduction de facteurs rationnels en dehors du signe radical, mais bien par l'application directe des formules $(a \pm b)^2$ et $(a \pm b)^3$.

Ainsi nous voyons qu'Alkarchî calcule avec des radicaux irrationnels ou, en d'autres termes, qu'il les considère également comme des nombres : c'est ce qu'il fait encore indirectement lorsque plusieurs de ses équations déterminées ont des racines irrationnelles; alors, dans ces équations, les symboles qui correspondent à notre x^m représentent des puissances de nombres irrationnels, — tandis que Diophante admet toujours que x doit être un nombre rationnel.

Maintenant nous avons vu, il est vrai, que les Indiens calculaient sans aucun scrupule avec des nombres irrationnels —

mais ce n'est pas eux qu'Alkarchî a sciemment imités. Au contraire, il reste significatif de voir faire ici la même chose qu'eux par un homme entièrement familiarisé, grâce aux écrivains grecs, avec l'idée de l'irrationnel et qui, à la façon dont il distingue entre les démonstrations géométriques et les explications arithmétiques, donne à entendre qu'il s'est convaincu de l'impossibilité de trouver dans ces dernières aucun fondement universellement valable.

En tant que disciples des Grecs, les Arabes ne pouvaient donc s'en tenir aux raisonnements arithmétiques, et nous le pouvons voir, en particulier, à l'Algèbre que nous a laissée le remarquable mathématicien et poète philosophique du XI[e] siècle, Omar Alkhaijâmi : il met ses explications de la signification des radicaux irrationnels en rapport direct avec les strictes conceptions des Grecs; il distingue entre les résolutions d'équations, par l'Arithmétique et par la Géométrie — pour les premières, il ne veut pas qu'elles soient seulement rationnelles, comme le voulait Diophante et ce qui suffirait logiquement, mais encore entières. Puisqu'on peut calculer avec ces quantités, une démonstration arithmétique de la justesse de telles résolutions est suffisante; au contraire les solutions du deuxième genre peuvent être irrationnelles, et c'est précisément pour cette raison qu'il est besoin de la Géométrie en vue de les énoncer et de les démontrer.

En conséquence, les racines carrées et cubiques sont représentées à l'aide des constructions, connues depuis les Grecs, d'une et de deux moyennes proportionnelles; pour les radicaux d'ordre plus élevé, l'espace n'ayant que trois dimensions, il ne saurait être de représentation géométrique possible — et Alkhaijâmi n'en connaît point d'autre généralement applicable — tandis que pour la formation des puissances d'ordre supérieur, au contraire, il indique, d'accord avec la théorie euclidienne des proportions, la formation des rapports composés. — Grâce à ces rapports composés on obtient indirectement une explication de ce que signifient les radicaux irrationnels d'ordre supérieur, rencontrés dans Alkarchî.

Ainsi la conception d'Alkhaijâmi est donc parfaitement grecque : Alkarchî, lui-même, en aurait probablement reconnu l'importance théorique.

Pour ce qui est du calcul des radicaux, Alkhaijâmi renvoie à l'extraction des racines carrées et cubiques chez les Indiens; il ajoute que, de son côté, mais alors dans un Ouvrage inconnu, il a donné des règles d'extraction pour des racines à exposants arbitraires. Dans ces conditions, il dut évidemment connaître les coefficients binomiaux pour le cas des exposants entiers et, par suite, posséder les règles de formation de ces coefficients. Il dit enfin n'avoir traité l'extraction de ces racines que par l'Arithmétique; alors, pour lui, l'extraction n'est valable que dans les cas où elle aboutit à une racine rationnelle, faute de quoi il n'avait pas même expliqué, d'une manière précise, la signification de cette opération.

Il est clair, cependant, qu'aussi bien l'extraction de pareilles racines que celle des racines carrées et cubiques était utilisable pour un calcul approché de racines irrationnelles; au reste, comme exemple d'extraction approximative de racine, nous pouvons citer Alkarchî : pour $\sqrt{a^2+r}$, si a est le nombre entier immédiatement inférieur, il donne comme une valeur plus approchée $a+\frac{r}{2a+1}$, valeur que l'on obtient en appliquant la règle des *deux fausses positions* (*regula duorum falsorum*) (*cf.* p. 275) — ou bien encore l'interpolation entre a et $a+1$.

Quelque différents que soient les points de vue d'Alkarchî et d'Alkhaijâmi, quant au traitement des radicaux, leur occupation de ces extractions dut néanmoins contribuer à soulever chez les Arabes un problème rejeté dans l'ombre par le procédé grec, à savoir la solution de l'équation cubique par les racines carrées et cubiques. Si les Grecs, ce qui est possible, se sont occupés de ce problème dans l'antiquité, il dut bientôt perdre de son intérêt à leurs yeux par cela même qu'on pouvait résoudre les équations cubiques à l'aide des procédés géométriques, — les mêmes, précisément, qui servaient à une représentation universellement valable de la racine cubique, — c'est-à-dire par l'intersection de sections coniques : on devait aussi, comme nous l'avons vu, cesser de s'intéresser à la réduction de problèmes en équations cubiques, telle que la pratiquait Archimède, en voyant qu'il était pos-

sible, en dehors de cette réduction, de résoudre ces questions par les mêmes procédés.

Bien que ce ne furent pas les Arabes qui devaient trouver la solution de l'équation cubique, leurs nombreux travaux manifestent suffisamment l'intérêt qu'ils portaient à ce sujet : le principal point de départ de ces recherches fut le problème d'Archimède sur la division de la sphère, et la vieille solution de cette question par des sections coniques (*cf.* p. 152, 179) dont on rapporte l'origine à Archimède — ou, du moins, à son époque. Comme cette solution, ainsi que nous l'avons vu, embrasse, ou du moins peut être facilement amenée à embrasser toutes les équations de la forme $x^3 + ax^2 + b = 0$, que, en outre, la condition d'égalité de deux racines s'y trouve expressément, et qu'il est aisé, soit de réduire à cette forme l'équation générale du troisième degré, soit de la traiter en substance de la même manière, il n'y avait pas, sur ce terrain, de difficultés scientifiques particulièrement grandes à surmonter.

Les Arabes, en tout cas, poussèrent l'étude des équations cubiques jusqu'à établir des distinctions entre ces équations, en partie d'après les signes des coefficients, en partie d'après leurs valeurs qui donnent un plus ou moins grand nombre de racines : le classement de ce genre le plus détaillé se trouve dans l'Algèbre d'Omar Alkhaijàmi. Alors, dans chaque classe particulière, on montre comment le problème est soluble par les sections coniques, et combien il comporte de racines, en tant que racines positives — puisque les Arabes n'en considèrent point d'autres. Cependant, le classement d'Alkhaijàmi présente quelques défauts : ils proviennent de ce qu'il n'indique pas précisément le diorisme qui constitue le principal avantage de la solution grecque par les sections coniques : d'autres écrivains arabes réussissent mieux dans un tel classement (Alkouhì en particulier) en se conformant au manuscrit transmis par Eutocius.

De ce fait que les équations du troisième degré furent élucidées avec plus de détail que dans la Géométrie grecque, telle qu'on l'avait alors et qu'on la possède encore maintenant, elles servirent aussi plus directement à la solution

d'autres questions, tant d'origine grecque que nouvelles. Dans les premières, la trisection de l'angle gagne une foule de solutions : c'est ainsi que nous devons aux Arabes la solution même que l'on est en droit, peut-être, vu sa connexité avec les lemmes d'Archimède, d'attribuer à cet écrivain (*cf.* p. 64) ; Alkouhì trouve également la solution du problème qui consiste à déterminer un segment de sphère d'après son volume et sa surface courbe — il y joignit une méthode pour établir le diorisme correspondant, diorisme que donne Archimède à la fin de son deuxième Livre sur la sphère et le cylindre (*cf.* p. 153 et 181).

Ne parvenant pas, cependant, à imaginer une solution générale des équations du troisième degré par radicaux, les Arabes devaient alors s'en tenir à ces équations elles-mêmes dans les problèmes de calcul pratique qui en dépendent ; du reste, aujourd'hui encore, ce procédé offre plus de facilité pour le calcul que l'application de la solution générale. Il nous a été conservé un exemple fort joli du calcul numérique d'une racine d'équation cubique ; on s'est servi de ce calcul, au XV[e] siècle, pour élaborer les Tables trigonométriques d'Oloug Beg, mais il peut fort bien dater d'une époque plus ancienne : *sin* 3° étant connu, on se propose de trouver *sin* 1°, qui dépend alors d'une équation de la forme

$$x^3 + Q = Px.$$

x étant assez petit, on peut, avec une certaine approximation, l'égaler à $\frac{Q}{P}$; on calcule, pour cette quantité, une valeur approximative a telle que le reste de la division R soit petit, du même ordre que a^3.

On a alors, en posant $x = a + y$,

$$a + y = \frac{(a + y)^3 + Q}{P},$$

d'où

$$y = \frac{(a + y)^3 + R}{P}.$$

Comme le reste R, qui est du même ordre que a^3, est grand par rapport à $a^2 y$, on peut, dans un calcul approché,

négliger les termes qui contiennent y au numérateur, et l'on obtient alors, avec une nouvelle approximation,

$$y = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P};$$

puis on insère dans l'équation rigoureuse $y = b + z$, où z, à son tour, se détermine de la même manière par approximation, etc., — les fractions étant d'ailleurs représentées comme sexagésimales.

L'objet du calcul que nous venons d'indiquer ici appartient à la Trigonométrie : nous nous occuperons bientôt de cette branche mais, avant d'abandonner l'Arithmétique, l'Algèbre et la théorie des nombres chez les Arabes, dont nous avons examiné jusqu'à présent les diverses conceptions générales, nous allons donner quelques types des résultats obtenus dans ces domaines, particulièrement dans la théorie des nombres.

Au IXe siècle, Thâbit ibn Korra joignit à la détermination euclidienne des *nombres parfaits* (p. 130) certaines règles pour déterminer les nombres que les Pythagoriciens appelaient *nombres amiables*, c'est-à-dire des nombres tels que l'un d'eux égale la somme des diviseurs de l'autre (*voir* p. 28); la règle est la suivante : si $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.2^{n-1} - 1$, $r = 9.2^{2n-1} - 1$ sont tous trois des nombres premiers absolus, $2^n.p.q$ et $2^n.r$ sont alors des *nombres amiables*.

A partir du IXe siècle [1], les Arabes se sont occupés des carrés dits *magiques* : les nombres qui les composent sont disposés en carrés de telle façon que les sommes des lignes, des colonnes, et des diagonales, y soient égales. Le plus ancien exemple d'un pareil carré magique se trouve dans une Table chinoise, vieille peut-être de 4 à 5000 ans; c'est le suivant :

8	3	4
1	5	9
6	7	2

[1] Cette date, plus reculée que celle admise jusqu'à présent, est établie par le titre d'un Ouvrage de Thâbit sur ce sujet (SUTER, *Die Mathematiken und Astronomen Araben*, Leipzig, Teubner, 1900, p. 36) (T.).

Les Arabes, pour leur part, formaient des carrés magiques avec les nombres jusqu'à 16, 25 et 36, et ils disaient même qu'on en pouvait former de semblables avec les nombres jusqu'à 49, 64 et 81; au reste, des mathématiciens indiens et byzantins s'occupèrent également du même objet.

Mais voici une proposition de la théorie des nombres, trouvée aux environs de l'an mille par Alkhodjandî, et qui présente incontestablement un intérêt mathématique beaucoup plus considérable : à savoir que l'équation $x^3 + y^3 = z^3$ est insoluble rationnellement.

On rencontre, dans Alkarchî, les sommations d'origine grecque pour $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$ et $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots$. Toutefois il ne parvient pas à établir la première : il ignorait donc la méthode d'Archimède; pour la seconde, il donne la démonstration que nous avons citée lorsque nous avons montré comment les Grecs connaissaient ce théorème (p. 206).

Au contraire, il y a un réel progrès dans la sommation que fait Alkâschî au XVe siècle pour la série $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$: il donne pour somme

$$\left[\frac{1+2+\dots+n-1}{5} + (1+2+\dots+n)\right](1^2+2^2+\dots+n^2).$$

3. — La Trigonométrie des Arabes.

Les Arabes étaient tellement familiarisés avec la Géométrie grecque, et le calcul indien, que nous rencontrons très naturellement leurs progrès les plus importants dans ce qui concerne la Géométrie calculante, ou Trigonométrie : nous pouvons l'appeler ainsi, désormais, avec d'autant plus de raison que les Arabes, tout comme les Indiens, employaient des Tables de sinus au lieu des Tables de cordes d'arc de Ptolémée. Le mot *sinus* est lui-même d'origine indienne : c'est la traduction latine exacte d'un mot arabe, qui provenait lui-même de la déformation du terme indien signifiant *sinus*.

Pour construire une Table trigonométrique, il s'agit avant tout de calculer *sin* 1° ou *sin* $\frac{1^\circ}{2}$, qu'on ne saurait déterminer à l'aide d'équations quadratiques; nous venons bien

de voir une solution de l'équation cubique qui sert à cette détermination.

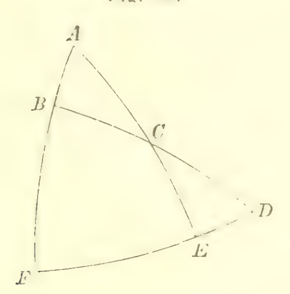
Le plus souvent, aussi bien ici que plus tard dans le calcul du sinus de 10′, on utilisait pour cela une interpolation entre des sinus susceptibles d'être exprimés par des racines carrées. Pour commencer on se contente d'une interpolation toute semblable à celle de Ptolémée (p. 191); mais, plus tard, dans la seconde moitié du xe siècle, le grand astronome et mathématicien Aboul Wafâ, à Bagdad, obtient une interpolation plus délicate encore : il profite de ce fait que les différences de sinus qui correspondent à des arcs équidistants décroissent en même temps que croissent les arcs, et, par ce moyen, il savait également juger du degré de précision de ses calculs. On lui doit des Tables de sinus de dix en dix minutes, avec une erreur limite de $\frac{1}{60^4}$; enfin, pour faciliter davantage les calculs trigonométriques, en les débarrassant de ces combinaisons pénibles avec le théorème de Pythagore, ce qui exige sans cesse de nouvelles extractions de racines, il construisit aussi une Table des tangentes.

Pour l'application de ces Tables, on s'attacha, en partie aux méthodes contenues dans l'*Analemme* de Ptolémée (p. 193), en partie aux usages du théorème de Ménélas indiqués par la *Syntaxe* de Ptolémée (p. 195). Peu à peu, on savait également recourir plus directement à l'Ouvrage de Ménélas, et l'on prenait ses recherches comme point de départ pour des améliorations essentielles des calculs astronomiques : la règle des quatre grandeurs, déjà citée à l'occasion du théorème de Ménélas, peut nous en servir d'exemple. Avant tous, Aboul Wafâ améliora les règles pour ces calculs, en vue desquels il avait créé des Tables d'une extension inconnue jusqu'alors, et une partie de ses innovations tend à utiliser au mieux possible la nouvelle Table des tangentes.

Les recherches trigonométriques d'Astronomie pénétrèrent jusqu'aux confins de l'Occident où, au xie siècle, Djâbir ibn Aflah de Séville, connu sous le nom de *Geber*, écrivit un grand Ouvrage astronomique; ce Traité se distingue des Ouvrages antérieurs que nous avons parce que la plupart des propositions trigonométriques employées sont affectées

de démonstrations différentes de celles de Ptolémée. En outre, grâce à une relation nouvelle entre deux angles et un côté, Geber complète les formules de Ptolémée qui concernent le triangle sphérique rectangle : cette relation se trouve au moyen de la figure employée par Ptolémée, dans laquelle DEF est un grand cercle ayant pour pôle le sommet de l'angle A du triangle ABC, rectangle en B. Le triangle

Fig. 30.



également rectangle DEC a l'angle C commun avec ABC, et $DE = 90^\circ - A$, $CD = 90^\circ - a$, d'où il suit que $\cos A = \cos a \sin C$. Cette proposition porte le nom de *Geber*.

Revenons maintenant à Bagdad, où la Trigonométrie allait occuper une position plus autonome, indépendante des applications astronomiques. On commença de s'occuper directement des triangles plans et sphériques; alors, les diverses solutions des problèmes ayant pour but de déterminer les éléments d'un triangle (côtés et angles), étant donnés trois d'entre eux, prirent une importance capitale : un des premiers pas, dans cette voie, est l'invention du théorème sur la proportionnalité des *sinus* des côtés aux *sinus* des angles opposés dans un triangle sphérique, propriété qui peut être attribuée à Aboul Wafà, ou à un de ses contemporains.

Le résultat final de ces efforts des Arabes nous est donné, d'ailleurs, dans un Ouvrage de Nassìr Eddìn sur la Trigonométrie plane et sphérique, qui fut connu ces derniers temps seulement, en Europe, par une traduction française; son titre : *Traité du quadrilatère*, provient de ce que le quadrilatère complet de Ménélas y sert de point de départ aux investigations.

Il est fort inutile de nous arrêter à la Trigonométrie plane, inutile également de montrer comment on parvient à la solution d'un grand nombre des principaux problèmes de la Trigonométrie sphérique : ainsi, le théorème des *sinus*, que nous venons de citer, se déduit facilement du cas où l'un des angles est droit — par la division du triangle en deux triangles rectangles.

Aussi allons-nous nous contenter de montrer, du moins, comment Nassîr Eddîn résout certains problèmes plus difficiles :

Dans un triangle sphérique ABC (*fig.* 30, où nous ne regardons plus l'angle B comme droit) et dont on connaît les côtés a, b et c, il détermine un angle A de la manière suivante : il prolonge AB et AC jusqu'en $AF = 90°$ et $AE = 90°$, puis il trace le quadrilatère complet ABCDEF; le théorème de Ménélas ou bien la règle des quatre grandeurs donne alors

$$\frac{\sin BD}{\sin CD} = \frac{\sin BF}{\sin CE} = \frac{\cos c}{\cos b}.$$

Comme on connaît, de plus, la différence a des arcs BD et CD, on peut calculer ces arcs au moyen d'une règle déjà connue de Ptolémée (p. 191); cela fait, on connaît les hypoténuses et un côté dans chacun des deux triangles rectangles DBF et DCE, avec quoi l'on peut déterminer DF et DE — ainsi que leur différence, qui n'est autre que l'angle A.

Mais la manière dont Nassîr Eddîn détermine les côtés, étant donnés les trois angles, est plus remarquable encore : comme nous le faisons nous-mêmes actuellement, il ramène ce problème au précédent par la construction du *triangle polaire* ou *triangle supplémentaire* du triangle donné, c'est-à-dire d'un triangle dont les côtés ont pour pôles les sommets du triangle donné; on sait en effet que, dans ce cas, tout sommet de l'un des deux triangles est le pôle d'un côté de l'autre, en même temps que les angles sont les *suppléments* des côtés de l'autre triangle. L'ouvrage de Nassîr Eddîn prouve que l'invention première de cette proposition, retrouvée depuis par les Européens, revient bien aux Arabes.

Avant de prendre congé de cet auteur, remarquons aussi qu'il connaissait le théorème planimétrique suivant : tout

point de la circonférence d'un cercle, qui roule à l'intérieur d'un cercle de rayon double, décrit un diamètre du second cercle.

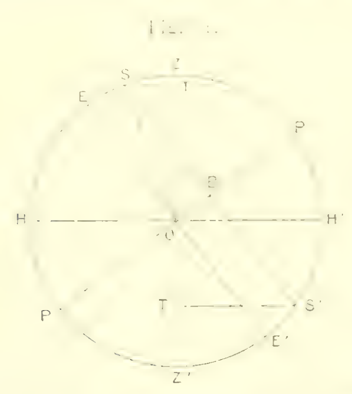
Les diverses recherches trigonométriques, tant celles qui aboutirent au calcul des Tables que celles qui furent nécessitées par la détermination des triangles, comportaient certaines transformations trigonométriques et la solution de certaines équations : nous venons de faire allusion à l'une d'elles, que connaissait déjà Ptolémée, mais nous citerons encore la transformation exprimée aujourd'hui par la formule

$$\cos\varphi \cos\delta = \frac{1}{2}[\cos(\varphi + \delta) + \cos(\varphi - \delta)]$$

et dont on se sert pour rendre la somme de deux *cosinus* calculable par logarithmiques. Autrefois elle servait, tout au contraire, à remplacer la multiplication trop difficile par une addition et, plus tard, on en devait généraliser l'application en Europe, dans le même sens.

Ni ces formules, ni celles qui servaient à la solution des triangles, ne furent cependant exprimées dans aucun langage de symboles. Même encore chez les Arabes, la Géométrie était le truchement des Mathématiques générales; *a fortiori* devait-elle suffire là où il ne s'agit que de quantités d'origine

Fig. 31.



géométrique. Au reste, cela n'était pas si difficile que nous le pourrions croire, gâtés que nous sommes par l'usage des formules; qu'on en juge seulement par cette figure (*fig.* 31)

dont l'astronome égyptien Ibn Jounos se sert, au xe siècle, dans ses Tables astronomiques, dites *hâkimites*, pour démontrer la règle exprimée par la formule que nous venons de citer. De même que pour celle de l'*Analemme*, la figure se présente dans le plan du méridien : HH' est la ligne de section avec l'horizon, EE' avec l'équateur, SS' avec le plan où se meut un astre en un jour, Z le zénith, Z' le nadir, P le pôle du monde. $H'P = ZE = Z'E' = \varphi$ sera la hauteur du pôle et $ES = E'S' = \delta$, la déclinaison de l'astre, $ZS = \varphi - \delta$ et $Z'S' = \varphi + \delta$. La projection de SS' sur la verticale ZZ' est donc

$$\cos\frac{1}{2}(\varphi - \delta) + \cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta).$$

Comme, du reste, $SB = \cos\delta$, et que SB forme avec la verticale l'angle φ, cette même projection aura pour grandeur $2\cos\delta\cos\varphi$ — pour faciliter le coup d'œil aux lecteurs modernes, nous avons choisi pour unité le rayon du cercle.

Geber est le seul Arabe d'Occident que nous ayons eu à mentionner : c'est lui-même qui fit part aux Européens de sa façon d'envisager la Trigonométrie, conception à laquelle, d'ailleurs, il manquait encore le traitement général des triangles plans et sphériques. A propos des Mathématiques arabes d'Occident, nous ne désirons plus faire que la remarque suivante : peu à peu, la méthode arithmético-algébrique se débarrassa des formes géométriques grecques, tandis que se développait l'emploi des symboles mathématiques, par exemple l'introduction d'un symbole pour la racine carrée.

Cependant les écrivains grecs gardaient une autorité révérée chez les Arabes occidentaux eux-mêmes, et c'est par leur intermédiaire qu'ils furent connus en Europe : cette connaissance s'y serait toutefois répandue notablement plus vite si les Européens avaient eu pour maîtres directs les Arabes d'Orient.

4. — Premier réveil des Mathématiques en Europe.

Notre dessein ne saurait être de nous occuper ici des particularités qui concernent le médiocre développement qui fut donné dans les cloîtres au calcul avec l'abaque romain, ni

même des voies par lesquelles les Arabes firent pénétrer en Europe d'autres procédés de calcul, tout comme une Mathématique meilleure que celle qu'on tenait des Romains ; d'autant que quelques importations peuvent également être venues de Constantinople et d'autres lieux grecs.

Cependant, si nous voulons parler du plus grand mathématicien d'Europe au moyen âge, Léonard de Pise (vers l'an 1200), nous devons, comme repoussoir, dire d'abord en passant à quel point, par ailleurs, on se trouvait en Europe de son temps : on possédait alors, par traduction de l'arabe, des Traités de calcul (*algorithmes*), une Algèbre d'équations du premier et du second degré, les *Éléments* d'Euclide, et la *Syntaxe* de Ptolémée ; mais les quelques exemplaires manuscrits n'étaient accessibles qu'à fort peu de gens, et ces rares lecteurs, eux-mêmes, étaient assez peu capables d'en pénétrer la substance et de la mettre à profit.

A la même époque déjà, en maints endroits, le calcul algorithmique, c'est-à-dire indien, tendait à gagner les cercles savants, — cependant que d'autres employaient l'abaque ; Gerbert, futur pape Sylvestre II, avait contribué, un peu plus d'un siècle auparavant, au perfectionnement de l'abaque, sur lequel on écrivait les caractères numériques dans des colonnes distinctes (p. 248). La différence entre ces deux méthodes consistait donc en ce que l'Algorithmétique, grâce à l'emploi du signe o, n'avait plus besoin de la division par colonnes ; d'ailleurs, aux divers procédés, se rattachaient différentes traditions, parmi lesquelles celle-ci, peu à la louange des *Algorithmiciens* : à la suite de Mohammed ibn Mousà, ils persistaient à considérer comme des opérations spéciales la duplication et la division par deux ; — en revanche, ils avaient l'avantage de connaître l'extraction des racines carrées et cubiques, tandis que les *Abacistes* ne pratiquaient que celle des racines carrées. Enfin, les Algorithmiciens employaient les fractions sexagésimales ; les Abacistes continuaient, en partie, à se servir de la division duodécimale qui dérivait du système monétaire romain.

Léonardo Fibonacci — c'est-à-dire *fils de Bonaccio*, comme on l'appelle souvent du surnom de son père — est originaire de Pise, importante ville commerciale où, de bonne heure, il

apprit le calcul sur l'abaque. Bientôt il visita, au cours de voyages d'affaires (ou peut-être comme fonctionnaire), l'Égypte, la Syrie, la Grèce, la Sicile et la Provence : et il profita de cette occasion pour pousser plus avant son instruction en calcul et en Mathématiques. Ce qu'il apprit ainsi des Arabes et des Byzantins, il essaya d'en faire part à la *race latine* par son vaste Ouvrage, le *Liber Abaci*, dans lequel, avec une habileté supérieure, il donne et traite, par de nombreux exemples, presque tous les calculs que nous avons rencontrés jusqu'ici : calculs sur les nombres entiers, écrits d'après le *système de position*, et sur les fractions; toutes espèces de comptes commerciaux; solutions de problèmes qui, s'il les avait mis en équations, eussent dépendu d'équations du premier degré, et qu'il traite par les deux règles de fausse position et la méthode indienne d'inversion; progressions arithmétiques et séries de termes dont la différence seconde est constante; problèmes qui dépendent d'une progression géométrique, ou bien encore qui, par exemple ceux sur la multiplication des lapins, se résolvent comme des questions d'intérêts composés; quelques problèmes aussi qui relèvent d'équations indéterminées du premier degré — mais homogènes seulement et ne présentant par conséquent aucune difficulté sérieuse; extraction des racines carrées et cubiques; enfin, problèmes qui dépendent d'équations déterminées et indéterminées du deuxième degré.

Le titre *Liber Abaci* ne rime guère, semble-t-il, avec ce fait que Léonard emploie partout le symbole numérique o : on sait, en effet, que c'est le calcul sur l'abaque qu'il avait appris tout d'abord; quant à l'Arithmétique indienne, il l'avait empruntée directement aux Arabes, et peut-être n'en avait-il même pas rencontré l'usage en Europe — où elle n'était connue que dans quelques cercles ecclésiastiques. Ce qui prouve, du moins, qu'il n'est pas algorithmicien d'origine, c'est qu'il déclare avoir trouvé lui-même l'extraction de la racine cubique; or cette extraction n'est pas dans Alkarchî, celui des écrivains arabes connus qui semble avoir exercé sur lui la plus grande influence et auquel il emprunte, notamment, une foule de problèmes qu'il traite, toutefois, d'une façon originale.

Le calcul approximatif d'une racine carrée, que fait Alkarchi (p. 261), paraît encore avoir suggéré l'approximation effectuée par Léonard, au moyen de la règle des deux fausses positions, pour une racine cubique dont la partie entière est déjà connue : si $\sqrt[3]{a+r}$ est la racine cubique cherchée, et que a représente le plus grand nombre entier contenu dans cette racine, la valeur approximative est

$$a + \frac{r}{3a^2+3a+1}.$$

L'exposition de Léonard, dans le *Liber Abaci*, se trouve accompagnée, partout, de démonstrations sous forme géométrique : c'est également le cas pour sa *Practica Geometriae* qui, entre autres, contient des extraits des livres stéréométriques d'Euclide, alors peu connus — d'ailleurs les démonstrations y diffèrent souvent de celles d'Euclide, sans être cependant personnelles, car on les rencontre également dans des écrits arabes plus anciens.

Dans les Ouvrages que nous mentionnons ici, Léonard, sous une forme claire, qui dénote une assimilation originale et un libre maniement des matières, considère les théorèmes les plus importants d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie élémentaire, connus avant lui, et les rend plus abordables que ne l'eût fait une simple traduction des livres où il les avait puisés : il éclaircit en particulier les questions d'Arithmétique au moyen de nombreux exemples. Mais son aptitude propre, même pour surmonter des difficultés sérieuses, apparaît principalement dans les solutions de quelques problèmes qui lui furent posés par le philosophe de l'empereur, Maître Johan de Palerme, en présence de l'empereur Frédéric II : dans l'un de ces exercices, il s'agissait de trouver un nombre carré qui, augmenté ou diminué de 5, donnât de nouveaux carrés, c'est-à-dire de résoudre rationnellement les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} y^2 = x^2 + a, \\ z^2 = x^2 - a, \end{cases}$$

a étant égal à 5. Ces équations (1) avaient d'ailleurs été traitées antérieurement par des mathématiciens arabes, qui

avaient trouvé que $x^2 + a$ et $x^2 - a$ sont des nombres carrés à la condition que l'on ait

$$x = m^2 + n^2, \qquad a = 4mn(m^2 - n^2).$$

Au reste, cette condition se déduit aisément du traitement des *équations doubles*, familier à Diophante (p. 211; *cf.* aussi premier problème, p. 214), joint à la détermination de triangles rectangles rationnels par Euclide; Léonard parvient cependant au même résultat par une voie un peu différente, en utilisant le théorème suivant : *Les nombres carrés sont les sommes des premiers nombres impairs.*

Après quoi il s'agit de déterminer m et n de façon que $4mn(m^2 - n^2)$ ait une valeur donnée, 5 dans le cas présent, et Léonard démontre tout d'abord que les nombres de cette forme, si m et n désignent des nombres entiers, sont divisibles par 24; puis, pour obtenir, autant que possible, des équations solubles en nombres entiers, on devra multiplier les équations données par un carré tel que le nouvel a soit divisible par 24. Léonard multiplie par 12^2; dans ces conditions

$$5.12^2 = 4.5.4(5 - 4)(5 + 4),$$

et, par suite, $41^2 \pm 5.12^2$ sont des nombres carrés; on trouve alors les carrés cherchés en effectuant la division par 12^2 : ce sont

$$\left(\frac{31}{12}\right)^2, \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Dans la solution, qu'il établit très généralement, Léonard trouve encore le moyen d'indiquer une détermination de la somme des premiers nombres carrés impairs jusqu'à une limite donnée : voilà donc une addition notable au résultat cherché.

Dans un autre des problèmes posés on demande de déterminer x, défini par l'équation

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Léonard trouve d'abord que x est compris entre 1 et 2, par conséquent ne saurait être un nombre entier; puis il re-

marque que x ne peut être, ni une fraction rationnelle, ni une des quantités irrationnelles qu'établit Euclide dans son dixième Livre. Il comprit d'une façon parfaitement juste le contenu de ce Livre assez ardu et qu'il étudia, précisément, pour y trouver, autant que possible, des formes qui exprimeraient exactement les racines de l'équation proposée : cependant, comme il le déclare, il remplace par des nombres les grandeurs générales représentées géométriquement par Euclide.

Ainsi donc, la racine n'étant point une quantité de forme connue, Léonard doit se contenter d'essayer une valeur approchée : il exprime cette valeur en fractions sexagésimales sous la forme

$$x = 1^{\circ}\,22'\,7''\,42'''\,33^{\mathrm{IV}}\,4^{\mathrm{V}}\,40^{\mathrm{VI}},$$

résultat dont l'excédent n'est que d'$1\frac{1}{2}^{\mathrm{VI}}$ environ.

Léonard ne dit pas comment il a trouvé cette expression mais, probablement, il ne dut suivre aucune méthode déterminée, prescrite avant lui : comme ferait encore aujourd'hui un calculateur exercé, il essaya successivement, pour les valeurs obtenues déjà, les corrections qui, vu toutes les conditions de ce cas, devaient paraître les plus convenables ; et, pour trouver ces valeurs d'essai, il avait à sa disposition la règle des *deux fausses positions* qu'il savait utiliser en tant qu'interpolation, comme cela ressort de ses calculs de racines cubiques. Du reste, en bon calculateur, il sut également arrondir les dénominateurs dans les corrections qu'il détermine par ce procédé, de sorte que sa méthode ressemble assez à celle de Viète, ou, comme on l'appelle vulgairement, à la méthode *newtonienne* pour le calcul approximatif des racines d'une équation algébrique : celle-ci n'est, d'ailleurs, qu'une extension du processus ordinaire pour la détermination des chiffres successifs dans une racine carrée ou cubique, méthode employée par les astronomes, depuis Ptolemée, pour la détermination des fractions sexagésimales comme approximations successives d'une racine carrée.

On a constaté, récemment, que l'équation proposée est choisie de telle sorte que, en effectuant le calcul avec les fractions sexagésimales, et en choisissant avec quelque habi-

jeté les corrections successives, on obtient relativement très vite la vraie valeur, à un petit écart près.

Suivant cette dernière remarque, Léonard partage peut-être l'honneur de cette grande approximation avec celui qui a posé le problème : il est même possible encore que ce soit Léonard lui-même qui, à l'occasion de la séance solennelle en présence de l'empereur, ait inspiré Maître Johan ; mais celui-ci cependant, Sicilien, et qui accompagnait cet empereur épris de science arabe, peut également avoir emprunté le problème aux mathématiciens arabes eux-mêmes. Personnellement, Léonard était évidemment un disciple des Arabes ; on voit donc bien que ceux-ci avaient dû pousser la science mathématique assez loin pour permettre à un calculateur éminent d'aborder une valeur approximative aussi délicate : l'exemple d'une pareille approximation, chez un écrivain arabe (p. 263), est de quelques siècles plus récent.

Léonard de Pise avait clairement exposé ce qu'il y avait de plus accessible et de plus important dans les Mathématiques arabes et byzantines d'alors. Mais, de ce fait, ces Mathématiques n'étaient pas devenues le bien commun de tous ceux qui s'occupaient de cette science en Europe : l'imprimerie n'existait pas et, entre les savants, il n'y avait point cet actif commerce qui, jadis, unissait les Grecs disséminés au loin. La caste savante du temps, le clergé, certains ordres monastiques particulièrement, puis les Universités, issues peu à peu de ces cercles, étendaient sans doute leurs relations en bien des contrées ; mais, pendant fort longtemps, cette caste ne paraît pas avoir subi l'influence de ce qui s'élaborait dans la sphère commerciale italienne, dont les rapports avec l'empereur hérétique, Frédéric, n'étaient guère un titre de recommandation.

Quand nous parlons ici, toutefois, de cercles savants et d'Universités, il ne faudrait pas se figurer des établissements d'éducation où l'on enseignait, toujours, quelque chose des Mathématiques ; sans doute, dans les Universités, il y avait une Faculté des Arts où l'on préparait à d'autres études plus avancées, mais cette préparation se limitait régulièrement au *trivium* (d'où le mot *trivial*), qui comprenait la Grammaire, la Rhétorique et la Dialectique, pour négliger le *quadrivium*,

composé de l'Arithmétique, la Musique, la Géométrie et l'Astronomie. D'ailleurs, même quand on faisait son *quadrivium*, l'Arithmétique se restreignait à un peu de calcul, et la Géométrie à une étude tronquée de quelques livres d'Euclide : on savait si peu de choses relativement à ce dernier que quelques-uns allaient jusqu'à croire que ses *Éléments* avaient été primitivement écrits en arabe, tandis que d'autres pensaient qu'il avait seulement fourni les propositions, et que Théon, l'éditeur grec, aurait donné les démonstrations.

Cependant, de temps en temps, des hommes issus de ces cercles s'adonnaient aux Mathématiques ; mais alors, comme nous l'avons dit, ce n'est pas chez Léonard de Pise qu'ils allaient puiser leur savoir, mais bien dans une Arithmétique et Algèbre (*de Numeris datis*) de son contemporain Jordanus Nemorarius, membre très considérable de l'ordre dominicain dont il fut le général, et dont Paris était le chef-lieu. Son travail offrait les avantages et les défauts mêmes que nous avons reconnus chez les algorithmiciens ; et néanmoins, de son propre fonds, il avait ajouté l'avantage essentiel de *représenter partout les nombres arbitraires par des lettres*, — non point toutefois de façon qu'il en pût résulter un calcul littéral, car ces lettres lui servaient uniquement de désignations dans le contexte ([1]).

Nemorarius écrivit, en outre, un Ouvrage de Géométrie sur les triangles et dans lequel, se basant sur les *Éléments* d'Euclide, il entreprend diverses recherches géométriques personnelles.

L'Arithmétique et Algèbre que nous venons de mentionner reste bien loin derrière le *Liber Abaci* de Léonard; et pourtant, par un autre côté, elle prouve qu'on se livrait aussi, dans les cercles savants, à un travail original d'appropriation et de traitement des Mathématiques — travail qui fut poursuivi en maints endroits. Citons par exemple Campanus, dans la dernière moitié du XIIIe siècle : son édition complète des

---

([1]) C'est-à-dire que si a et b, par exemple, désignent des facteurs, le produit sera représenté par une nouvelle lettre c. Il convient de remarquer qu'un tel emploi de lettres se trouve déjà chez Aristote, que l'on commençait alors à connaître en Occident. (T.)

Éléments d'Euclide devint, par la suite, la source principale où l'on puisa la connaissance de cet Ouvrage capital et, lui-même, avait ajouté quelques études nouvelles, comme celle de la somme des angles du pentagone étoilé. — L'important mathématicien anglais Bradwardin (1290-1349) devait aller encore plus loin dans cette voie : il établit des propositions générales sur la somme des angles de polygones étoilés.

A côté de ces recherches plus originales, on continua de traduire les Arabes et, plus tard, les Grecs aussi. Les écrits de Léonard eurent bien toujours quelque influence dans le nord de l'Italie où, 300 ans plus tard, une jeune science mathématique féconde devait se faire jour; de même pour d'autres lieux où, durant ces 300 années, les progrès allaient se manifester lentement. — Mais nous ne voulons pas insister ici sur ces développements, et il nous suffira d'indiquer quelques exemples des progrès effectivement réalisés.

Il faut mentionner, notamment, deux Ouvrages du mathématicien français Nicole Oresme (environ 1323-1382) :

Le premier est intitulé *Tractatus de latitudinibus formarum* : les mots *longitude* et *latitude*, appliqués au plan, désignent ici la même chose qu'appliqués à la sphère, c'est-à-dire des coordonnées rectangulaires; et l'on comprend surtout le sens de ces dénominations en remarquant que les coordonnées sont figurées à l'intérieur d'un rectangle, dont la plus grande dimension se trouve dans le sens des abscisses (c'est-à-dire de la longitude). Dans une telle représentation, les diverses intensités d'un phénomène naturel variable, comme la chaleur, sont figurées par les ordonnées (latitude), avec les temps correspondants pour abscisses (longitude), et, par cette méthode, on obtient un graphique des variations de la chaleur en fonction du temps, au moyen d'une courbe. — Oresme fait déjà cette observation très importante que c'est au voisinage des maxima et minima que la variation est la plus faible. — On voit que l'application des coordonnées, avec lui, est d'une tout autre nature que chez les anciens Grecs, bien qu'il paraisse y renvoyer : et cependant il nous faut très probablement admettre que, ni directement, ni par la voie indirecte des Arabes, il ne put avoir aucune connaissance de l'application géométrico-algebrique exacte des coordonnées à

l'étude des sections coniques et à la solution des problèmes — telle que la faisaient les Grecs.

Le second Livre d'Oresme porte le titre : *Algorismus proportionum*. Nous mentionnerons particulièrement l'introduction de *puissances à exposants fractionnaires*, et les règles les plus simples pour le calcul sur ces puissances. Oresme emploie même une notation spéciale pour les puissances : il écrit $4^{1\frac{1}{2}}$ à peu près ainsi : $[1p\frac{1}{2}]4$, où la lettre *p* (*proportio*) signifie *rapport* : comme cela ressort de la théorie exacte des proportions d'Euclide, les racines de ces puissances sont, en effet, des rapports, et les puissances à exposants entiers se forment comme des rapports composés.

Du reste il existe déjà chez les Anciens un précédent à la formation, par cette méthode, d'une puissance à exposant fractionnaire : Archimède montre, effectivement, que le rapport entre le plus grand et le plus petit segment d'une sphère, divisée par un plan, est plus grand que le rapport, pris une fois et demie, entre leurs surfaces courbes, c'est-à-dire que ce rapport à la puissance $\frac{3}{2}$.

En étendant ainsi aux puissances à exposants fractionnaires les règles de calcul des puissances de même base et à exposants entiers, l'œuvre d'Oresme permet déjà de pressentir le calcul par logarithmes.

Après l'invention de l'Imprimerie, le Livre d'Oresme que nous avons nommé le premier fut édité à différentes reprises : même auparavant, d'ailleurs, il était certainement assez répandu.

Le second, au contraire, ainsi que celui de Chuquet dont nous allons parler, ne furent imprimés que récemment, par pur intérêt historique, et paraissent n'avoir exercé aucune influence particulièrement notable : c'est ainsi que Chuquet, précurseur du calcul logarithmique, mais tout autrement que ne l'avait été son compatriote Oresme cent ans avant lui, ne connaît point ce second Livre. Tous deux, cependant, méritent d'être mentionnés : pour l'époque, et pour le milieu, ils indiquent ce dont étaient capables des hommes bien doués, ils montrent, en un mot, jusqu'à quel point on était parvenu.

L'Ouvrage de Chuquet auquel nous faisions allusion est le

type, pour nous, d'un excellent Traité de l'Arithmétique et de l'Algèbre au xve siècle : il porte le titre de *Triparty en la science des nombres*, et fut achevé en 1484.

Arrêtons-nous tout de suite au sujet même que nous avons déjà trouvé dans Oresme : en effet, quelques problèmes de Chuquet présentent indirectement des exposants fractionnaires, par exemple le suivant :

Un voyageur fait 1 mille le premier jour, 3 le second, 9 le troisième, etc.; combien a-t-il fait de chemin en 5 jours et demi ?

Chuquet indique effectivement la solution, obtenue en supposant que la rapidité s'accélère d'une façon continue, et selon la même loi que d'un jour au suivant.

Un autre problème, directement cette fois, exige un exposant, c'est-à-dire, en d'autres termes, un logarithme :

Un vase a une fissure par où se vide journellement $\frac{1}{10}$ de son contenu; au bout de combien de jours la moitié du contenu sera-t-elle écoulée?

La solution $6\,\frac{31441}{531441}$ est bien celle que l'on trouve par simple interpolation, ou en appliquant la règle de *deux fausses positions* aux valeurs d'essai 6 et 7; mais Chuquet, lui-même, ne trouve pas cette approximation très suffisante.

Enfin, dans un passage de son Ouvrage, il va jusqu'à donner formellement une règle capitale du calcul par logarithmes : il établit une série de puissances du nombre 2, avec leurs exposants appropriés, et remarque que le produit de deux nombres de la première série est le nombre même de cette série qui correspond à la somme des exposants des facteurs.

C'est par voie indirecte, il est vrai, que Chuquet laisse entrevoir la compréhension qu'il a des exposants fractionnaires, mais, en revanche, il emploie nettement dans ses notations l'exposant 0 et les exposants négatifs. Déjà, comme nous l'avons vu, Diophante avait des désignations spéciales pour chacune des quantités

$$x^{-6},\quad x^{-5},\quad \ldots,\quad 1,\quad \ldots,\quad x^{5},\quad x^{6},$$

et ses règles de calcul montrent qu'il n'était pas sans com-

prendre la concordance de ces grandeurs; Chuquet, lui, marque cette correspondance dans la notation elle-même, par ce fait qu'il exprime les exposants des différentes puissances de l'inconnue avec un signe d'exposant, joint au coefficient numérique par lequel on doit multiplier cette puissance : ainsi, cet exposant peut être positif, nul ou négatif. Négatif, on le désigne par m : de la sorte 7^{3m} signifie ce que nous exprimons aujourd'hui par $7x^{-3}$. En outre, Chuquet possède un signe pour la racine $n^{\text{ième}}$ (mais seulement pour des valeurs déterminées de n), et les signes p et m pour nos symboles $+$ et $-$. — On voit donc qu'il était en mesure de donner une représentation limpide à ses équations, et même encore à celles de leurs transformations qu'on avait jusqu'alors exprimées par des mots.

Si Chuquet, nous l'avons vu, ne craint pas d'introduire des quantités négatives dans ses exposants, il n'y a rien alors d'étonnant à ce qu'il ne soit point déconcerté par les solutions négatives de certaines équations : il s'entend fort bien à les élucider, — mais, par contre, les solutions imaginaires auxquelles devrait conduire l'un de ses problèmes paraissent uniquement correspondre à quelque erreur de sa part.

Passons rapidement sur des sujets, bien traités sans doute par Chuquet, mais que nous avons pu voir également chez des mathématiciens antérieurs, et contentons-nous de mentionner ce fait qu'il applique, et qu'il a même la prétention d'avoir inventé, la règle de la formation de moyennes grandeurs simples $\left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right)$ entre deux grandeurs connues $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$: il l'utilise dans la formation de nouvelles valeurs d'essai pour la solution plus précise d'une équation dont la racine est intermédiaire entre $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$.

Les Ouvrages comme ceux d'Oresme et de Chuquet prouvent qu'il y avait, aux derniers siècles du moyen âge, des hommes capables de contribuer avec originalité au développement des Mathématiques. Leur apparition, la richesse en problèmes et en investigations que nous rencontrons chez Chuquet, témoignent encore que les connaissances mathématiques, et le

goût de ces sciences, avaient déjà pris une assez grande extension. Au reste, les manuscrits tirés des bibliothèques d'Allemagne fournissent maintes preuves de ce progrès : c'est ainsi que, à Munich, on a trouvé une collection de *divertissements* arithmétiques datant du XIVe siècle — et, du siècle suivant, de semblables *divertissements* composés, cette fois, non plus en latin mais en allemand.

Il existe également d'autres manuscrits du XVe siècle : l'un d'eux, où l'on détermine des nombres *parfaits*, est écrit en allemand; et ils attestent tous un profond intérêt pour la théorie des nombres. En outre, vers la fin du XVe, l'Algèbre était venue d'Italie, par delà les Alpes; nous avons une preuve de cette origine italienne pour l'Algèbre, en Allemagne, dans le nom de *cossische Kunst* que l'on donne à cette science, et de *Cossisten* à ceux qui l'exerçaient : ce nom venait, en effet, de l'italien *cosa*, chose, c'est-à-dire la *chose* cherchée à l'aide de laquelle on opère tout comme si elle était connue. En fait de *cossistes* de marque il nous faut particulièrement signaler : Johannes Widmann d'Eger (porté à la date de 1480 dans les listes d'immatriculation de l'Université de Leipzig), dont on sait qu'il fit des cours universitaires d'Algèbre; Adam Riese (1492-1559) et, environ vers la même époque, Christoph Rudolff.

Si, chez eux, nous ne trouvons peut-être pas la réalisation de progrès théoriques dignes d'être notés ici, du moins la vulgarisation qu'ils développèrent pour le maniement de l'Algèbre devait naturellement entraîner avec soi des amendements dans la pratique, et préparer le terrain à des progrès plus considérables; ainsi, dans le Traité de Widmann : *Calcul adroit et joli pour tout commerce* (Behende und hubsche Rechnung auf allen Kauffmannschafft), on rencontre déjà les signes + et —, et leur emploi n'est pas considéré comme une innovation, tandis que les Italiens, même postérieurement, écrivaient encore *p* et *m*. L'Ouvrage en question, écrit en allemand, fut imprimé en 1489 et les éditions postérieures en attestent la popularité. — Dès 1483, d'autre part, avait été imprimée l'*Arithmétique* dite *de Bamberg*.

Tandis que, dans ce domaine, on allait en Allemagne à peine aussi loin que Chuquet, l'Astronomie, au contraire, et, avec

elle, la Trigonométrie, devaient s'y élever, dès la fin du moyen âge, à une hauteur considérable. Nous ne parlerons pas, ici, de Nicolas Copernic de Thorn (1473-1543) : son nom appartient à l'aube de l'époque moderne, dont il fut un des plus grands précurseurs; mais nous mentionnerons, en revanche, Peurbach et, particulièrement, son grand disciple Regiomontanus. Peurbach (1423-1461), professeur à l'Université de Vienne, acquit surtout de puissants titres à notre estime en introduisant la Trigonométrie de Ptolemée et des Arabes et, de plus, en établissant lui-même de nouvelles *Tables de sinus* assez étendues : de la sorte il prépara les voies où Johann Müller, ordinairement nommé Regiomontanus (1436-1476), devait pénétrer bien plus avant.

Ce dernier mena une existence fort agitée, tantôt en Italie, tantôt en Allemagne et en Hongrie : il n'avait que quarante ans lorsque la mort interrompit son activité débordante, mais son existence errante l'avait mis en contact avec un grand nombre d'astronomes et de mathématiciens; en Italie, notamment, il devait trouver l'occasion d'apprendre le grec, surtout dans le but de continuer l'édition de la *Syntaxe* de Ptolémée, commencée par Peurbach, — et, en même temps, il fit connaissance de première main avec d'autres mathématiciens grecs, qu'il prisait fort, en particulier Diophante.

Regiomontanus fit preuve d'une certaine prédilection pour la théorie des nombres : du reste, ce goût fut développé chez lui, aussi bien par les travaux allemands mentionnés qui traitaient de cette théorie que par ses relations avec les mathématiciens italiens, et il fut ainsi conduit à poser toute une série de problèmes assez difficiles sur la matière. Nous en citerons pour exemples :

Trouver trois nombres carrés qui soient en progression harmonique; quatre nombres carrés dont la somme soit encore un nombre carré.

Et, s'il ne donne pas les solutions de ces problèmes, il semble bien, toutefois, les avoir connues.

Ses travaux de Trigonométrie ont une portée très élevée. Mentionnons, d'abord, ses Tables trigonométriques, où il est le premier qui ait employé le système décimal : ses Tables de sinus, rédigées en dernier lieu, vont de minute en minute et,

comme il égale le rayon à 10^7, la précision obtenue est la même que dans une Table à 7 décimales, sans que, toutefois, les fractions décimales proprement dites fussent déjà en usage : — de plus il a calculé une Table de tangentes de degré en degré.

Pour ce qui concerne l'emploi des Tables, d'autres avaient cherché depuis longtemps à faire connaître les parties les plus importantes de la Trigonométrie sphérique arabe, jusqu'à Geber inclusivement, mais c'est Regiomontanus qui établit définitivement cette Science en Europe, d'autant que par ses recherches personnelles il l'avait notablement développée. Ceci assurait à la Trigonométrie sphérique, ainsi qu'à la Trigonométrie plane, une existence propre, indépendante de l'Astronomie : à ce point de vue Regiomontanus a joué sensiblement le même rôle en Europe que, chez les Arabes, deux cents ans auparavant, le savant Nassîr Eddîn qu'il ne connaissait point. Regiomontanus réalisa tous ces progrès dans son Ouvrage le plus important, intitulé : *De triangulis omnimodis libri quinque*: avec son habituelle piété pour Peurbach, il lui attribue le plan de ce livre.

A la vérité, tous les problèmes sur la détermination des triangles, à l'aide d'éléments donnés, y sont systématiquement établis et traités comme chez l'auteur persan-arabe en question qui, lui, couronnait l'œuvre de toute une école antérieure; mais, d'autre part, Regiomontanus pose une foule de questions qu'il traite par des méthodes variées, et il fournit de cette façon la matière et les instruments nécessaires pour de plus amples investigations : par exemple, s'il s'agit de la détermination trigonométrique de deux côtés d'un triangle plan, connaissant le troisième côté, la hauteur et l'angle opposé, il la fera résulter de la construction géométrique d'un triangle ainsi défini; de même, il détermine algébriquement un triangle avec un côté, la hauteur abaissée sur ce côté et le rapport des deux autres, en prenant pour inconnue la demi-différence des segments déterminés par la hauteur sur ce côté.

Dans le traitement d'un problème capital de Trigonométrie sphérique, Regiomontanus offre encore sur Nassîr Eddîn l'avantage de déterminer *directement* un angle d'un triangle

sphérique dont les côtés sont connus, au moyen de la règle

$$\frac{\text{sin-vers. } A}{\text{sin-vers. } a - \text{sin-vers. }(b - c)} = \frac{r}{\sin b \sin c},$$

où r est le rayon qui sert de base aux Tables, — ce qui correspond à notre formule usuelle de cosinus.

Le calcul qui en résulte ne diffère guère, cependant, de celui qui est indiqué dans l'*Analemme* de Ptolémée pour un problème astronomique de la même portée : mais c'est le mérite propre à Regiomontanus d'avoir attaché sa règle précise à un triangle sphérique quelconque.

Vers la fin de sa courte existence Regiomontanus avait espéré trouver assez de loisirs à Nüremberg pour y pouvoir faire des observations astronomiques, qu'il comptait traiter ensuite, ainsi que pour éditer les travaux des anciens mathématiciens, et les siens propres ; mais, honoré par Rome d'une invitation pour la réforme des calendriers, il vit bientôt son repos interrompu, — puis il mourut.

Nüremberg, cependant, devait rester longtemps encore un centre scientifique : c'est là que vécut et travailla, par exemple, le curé Johann Werner (1468-1528), qui se rattache à Regiomontanus par la Trigonométrie ; le premier, en Europe, il employa l'expression du produit de deux *sinus* au moyen de la différence de deux *cosinus* (p. 269), en vue de faciliter les calculs, et il devait également se signaler par son zèle à étudier les anciens auteurs grecs. La théorie des sections coniques intéresse particulièrement Werner : et, à défaut des démonstrations d'Apollonius qu'il ignorait, il devait inventer lui-même les démonstrations des propriétés fondamentales de la section d'un cône, démonstrations qui lui font le plus grand honneur.

A côté de la Science, et plus qu'elle encore peut-être, l'Art prit à Nüremberg une place importante : le célèbre peintre Albrecht Dürer (1471-1528) sut réunir ces deux facultés. Il est au courant des constructions géométriques, les exécute à l'aide de la règle et du compas, et les applique même à déterminer par points des courbes bien définies ; entre autres, il donne la construction de certaines *épicycloïdes* et de courbes analogues encore plus compliquées. Il tenta également d'assurer

les constructions de perspective par des règles mathématiques.

Retournons maintenant en Italie où, après la longue période obscure, nous avons vu apparaître Léonard de Pise comme le premier mathématicien véritablement digne de ce nom, et où, trois cents ans après lui, allaient être faites des découvertes qui devaient ouvrir aux Mathématiques une ère nouvelle; c'est bien là, du reste, qu'eut son foyer toute la Renaissance, tant pour les Sciences que pour les Lettres, et c'est d'Italie que Lettres et Sciences devaient passer aux pays voisins. Nous rencontrons en Léonard de Vinci (1452-1519) la même union de l'Art et des Mathématiques que chez Albrecht Dürer : comme lui, ce grand peintre, sculpteur et architecte, s'occupait profondément de Physique et de Mathématiques, tout en pratiquant avec intérêt les constructions géométriques. Ingénieur, il devait savoir aussi la Statique : il connaissait, par exemple, le centre de gravité des pyramides, et traita de même le problème de Cinématique qui consiste à déterminer le chemin que parcourt un point d'un plan dont deux droites glissent sur des points fixes.

Le degré d'avancement que l'on avait atteint en Italie, immédiatement avant l'ère des grands progrès, nous est indiqué par un Ouvrage très étendu de Luca Paciuolo : *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità*. Ce Livre, il est vrai, ne témoigne pas une pénétration des principes mathématiques aussi grande que celle que possédait déjà Léonard de Pise, mais il est cependant de composition assez large et fournit de nombreuses applications théoriques et pratiques. Le point important, c'est que ce traité, *imprimé* à Venise en 1494, se répandit : il était entre les mains de ceux qui, à l'époque suivante, devaient être en particulier les promoteurs de l'Algèbre; ils y trouvèrent un point de départ commun et, grâce à lui, purent se comprendre les uns les autres, et joindre leurs efforts.

Les trois siècles qui suivirent Léonard de Pise avaient été employés, surtout, à propager les connaissances et les moyens que possédait déjà ce savant, de manière que ces ressources pussent servir de point de départ à de nouveaux développe-

ments : cette base fut encore singulièrement élargie et consolidée par la connaissance directe que l'on avait désormais des écrivains anciens qui l'avaient eux-mêmes établie, notamment Euclide, et, pour une part, Ptolémée. En outre, on commençait à connaître les écrivains qui devaient susciter le prochain mouvement en avant, c'est-à-dire Archimède, Apollonius et Diophante. Enfin, un véritable progrès avait été réalisé par Regiomontanus sur le terrain de la Trigonométrie : on possédait déjà plusieurs des procédés techniques que devait employer l'Algèbre; puis, et quoiqu'ils ne devinssent jamais d'un usage courant, les symboles de Chuquet, fort développés, attestaient que l'on était à même de se créer les moyens d'exposition qui devaient être exigés par un développement plus avancé.

Ainsi s'était préparée une nouvelle phase d'épanouissement pour la Mathématique qui, par sa fécondité, allait être la digne émule des quelques siècles où les Mathématiques grecques atteignirent leur apogée; cette période s'ouvrit brusquement le jour où l'on reconnut, par la solution de l'équation cubique, qu'il était possible de mener à bien un problème que les Grecs et les Arabes avaient dû abandonner : on prit de la sorte, en ses propres forces, une confiance inconnue jusqu'alors. A l'aide de l'Imprimerie, les travaux les plus variés qui prenaient maintenant naissance dans les différents pays purent synchroniser leurs efforts d'une manière féconde; bientôt après ce réveil d'autres grands progrès eurent lieu en *Algèbre;* en même temps on apprit à comprendre les œuvres difficiles de la *Géométrie* grecque : ce qu'on y puisa fut ajouté à l'Algèbre moderne — et la *Géométrie analytique* apparut.

De plus, dans le traitement stéréométrique des sections coniques, on dépassa de beaucoup les anciens : on étudia les Ouvrages de *Statique* d'Archimède et l'on créa la *Dynamique :* en partant de l'étude de Diophante on arriva, par des recherches entièrement modernes, aux plus remarquables propositions de la *théorie des nombres*, et la connaissance des recherches d'Archimède sur l'infinitésimal conduisit à entreprendre, sur un champ de plus en plus large, de pareilles spéculations, et à développer les méthodes *ad hoc,* — si

bien que l'on possédait le *Calcul infinitésimal* dès la fin du xviie siècle.

Enfin, les tentatives mentionnées de la fin du moyen âge aboutirent à un emploi réel des *logarithmes*.

Au terme de notre esquisse de l'histoire des Mathématiques, dans l'antiquité et au moyen âge, nous avons cru pouvoir anticiper légèrement sur l'avenir pour mentionner les grands progrès qui ne devaient se réaliser que dans les siècles suivants; cependant, par là, nous aurons peut-être mieux fait comprendre la raison pour laquelle nous nous sommes arrêtés si longtemps aux Mathématiques de l'antiquité grecque : ce n'est pas seulement le grand intérêt qu'elles éveillent, pour elles-mêmes et en elles-mêmes, en tant qu'anneau de la série des nombreuses connaissances acquises à la fin du moyen âge, mais c'est, en même temps, parce qu'elles sont la propre source où l'on ne cessa de puiser une énergie intense pour le progrès — quand on eut appris, toutefois, à l'exploiter, et à combiner avec des idées aussi fertiles que nouvelles et originales les suggestions que l'on en sut tirer.

FIN.

INDEX.

Les pages citées ne sont pas les seules où l'on trouve les noms et les mots indiqués, mais celles qui contiennent quelque renseignement positif sur le personnage ou la matière en question.

[illegible]

TABLE DES MATIÈRES.

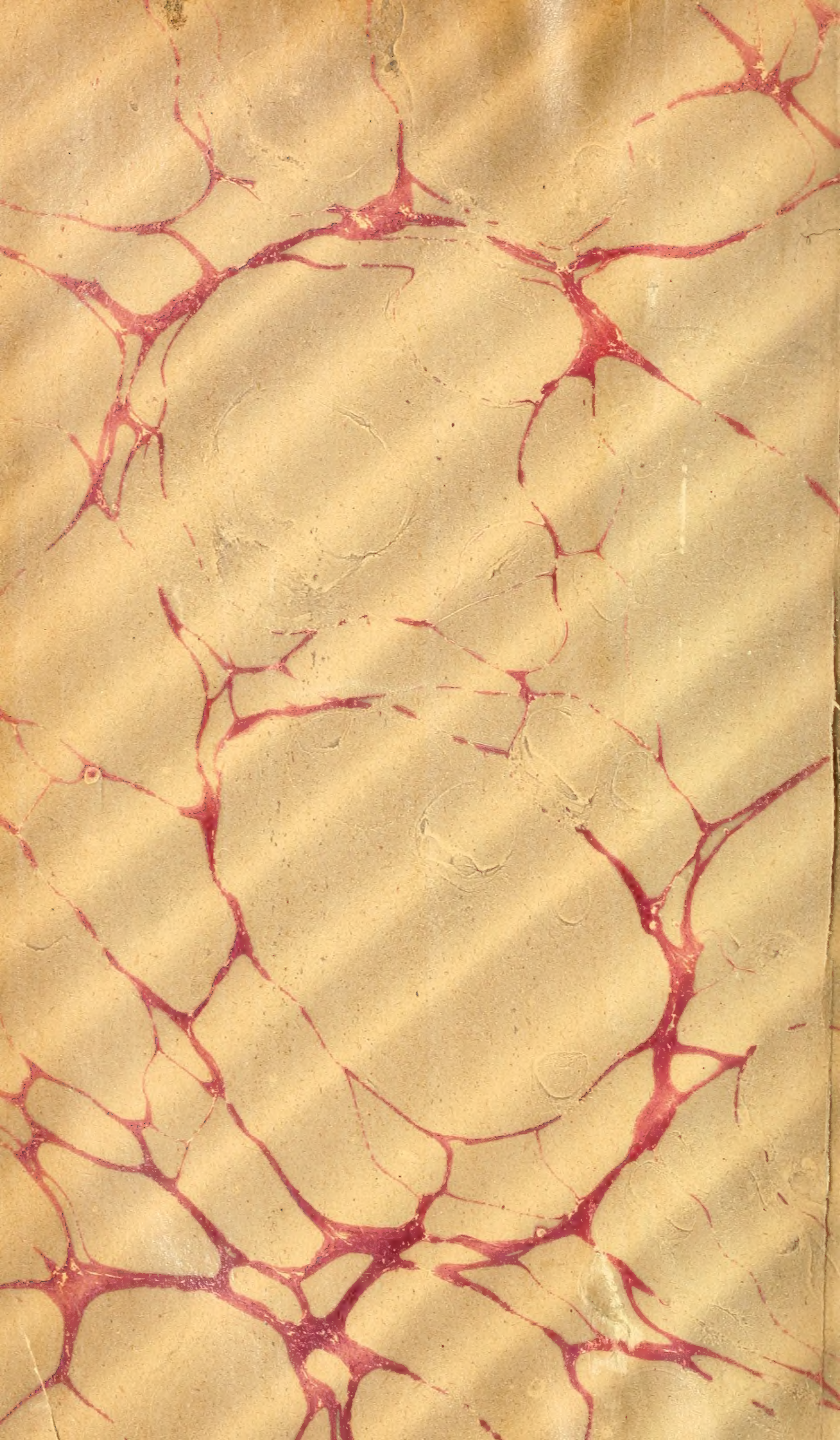
INTRODUCTION.

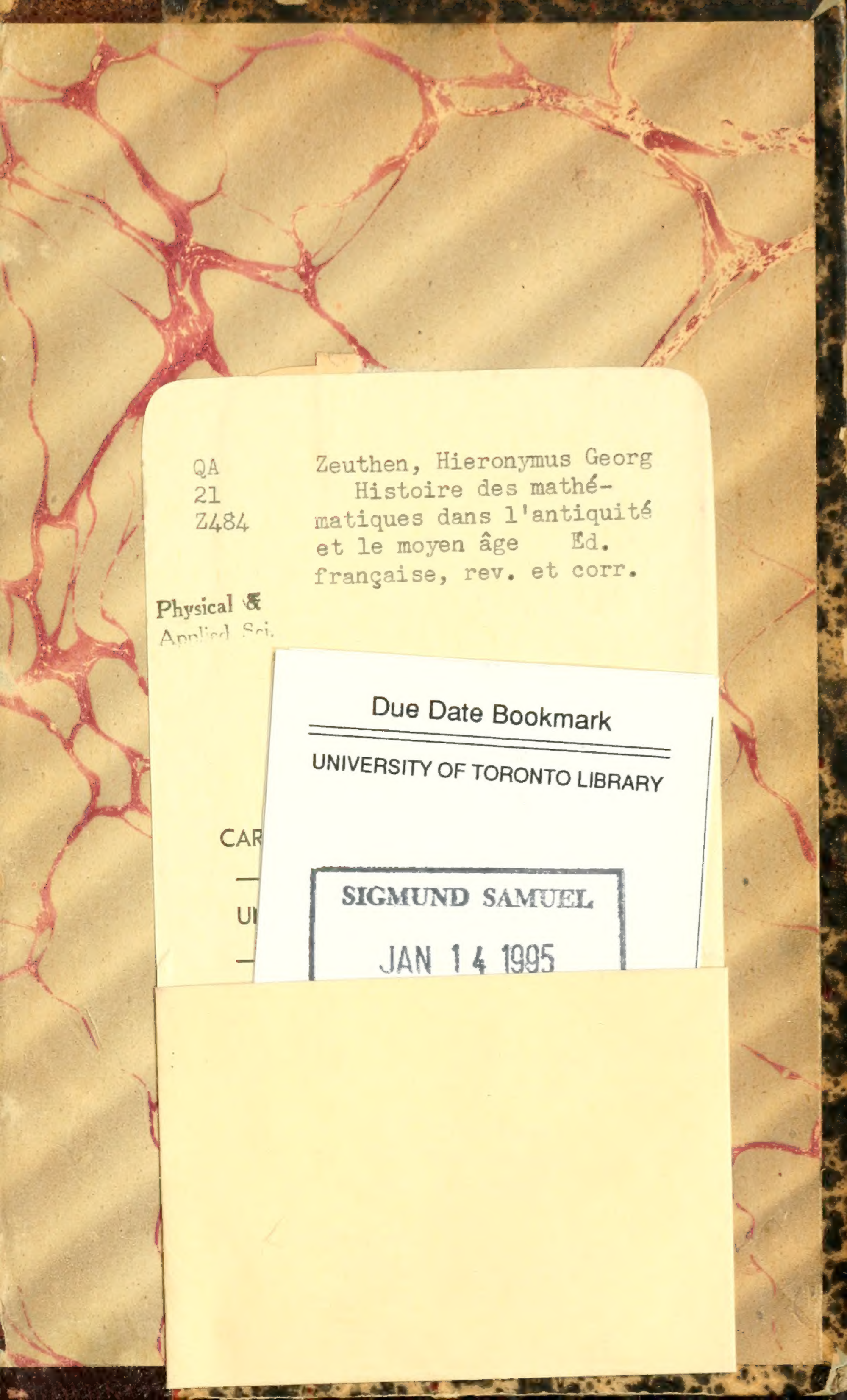
LES MATHÉMATIQUES GRECQUES.

LES MATHÉMATIQUES INDIENNES.

LE MOYEN AGE.

29221 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.




QA
21
Z484
Zeuthen, Hieronymus Georg
Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge Éd. française, rev. et corr.
Physical &
Applied Sci.
Due Date Bookmark
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
SIGMUND SAMUEL
JAN 14 1995

